

Разработка дискретного аналога поглощающего граничного условия для двумерного волнового уравнения

И.В. Куликова, Н.К. Приступчик

АО «НПП «Исток» им. Шокина»

Аннотация: в работе представлены поглощающие граничные условия (ПГУ) для численного решения многомерного волнового уравнения, реализуемое на уровне граничного элемента без введения дополнительных поглощающих слоев и без изменения структуры сетки. Предложенное ПГУ обеспечивает коэффициент отражения менее 0,5% по амплитуде на открытых и поглощающих границах расчетной области. Отсутствие дополнительных ячеек, устойчивость и простота алгоритма критичны для РИС-метода, поскольку сокращают время расчета.

Ключевые слова: РИС метод, уравнения Максвелла, калибровка Лоренца, поглощающие граничные условия.

1. Введение

ПО «Elisa» представляет собой программный комплекс для моделирования электронной оптики на основе метода частиц в ячейке (РИС-метода), ориентированный на исследование статического и динамического поведения потока частиц в электронных пушках сложной геометрии в аксиально-симметричной постановке [1,2].

В основе гибридного 2,5D РИС-метода лежит самосогласованное решение уравнений движения частиц в трёхмерном пространстве, при этом электрическое поле рассчитывается на неструктурированной сетке в меридиональной плоскости (R-Z). Для построения расчётных сеток используется генератор сеток Gmsh [3], обеспечивающий высокое качество дискретизации сложных геометрических областей. Такой подход позволяет точно описывать геометрию электродов за счёт применения неструктурированных сеток, а метод крупных частиц – моделировать процессы формирования виртуального катода в приэмиттерной области [1].

Моделирование нестационарных процессов в электронных пушках критически важно для обеспечения надёжности и долговечности электровакуумных приборов (ЭВП). Известно, что переходные процессы при включении и выключении прибора могут приводить к повышенному токооседанию и выходу из строя ЭВП [4]. Классические методы электронной оптики (метод трубок тока) анализируют эти процессы в квазистатическом приближении, что недостаточно для корректного описания динамики. В работе обосновывается необходимость перехода от уравнения Пуассона к волновому уравнению и предлагается способ корректной постановки граничных условий для него.

2. От электростатики к волновому уравнению: критерий применимости

В работе [5] был выведен критерий применимости электростатического приближения для задач моделирования переходных процессов в электронных пушках:

$$U_{cr} = mc^2/2q \cdot (1/N^2) \approx 255,5(1/N^2) \text{ [кВ]}, \quad (1)$$

где U_{cr} – предельное ускоряющее напряжение, при превышении которого электростатическое приближение становится некорректным, N – характерное число

ячеек сетки вдоль прибора, c – скорость света, m , q – масса и заряд электрона.

Анализ критерия показывает, что уже при ускоряющих напряжениях порядка нескольких киловольт условие применимости электростатического приближения нарушается. Для типичных значений напряжения в современных электронных пушках (10–30 кВ) использование уравнения Пуассона при моделировании переходных процессов становится некорректным.

Таким образом, корректное описание переходных процессов требует решения гиперболической формы уравнений поля — волнового уравнения Д’Аламбера для скалярного потенциала φ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

где ρ – плотность заряда, определяемая положением частиц в PIC-методе.

Для численного решения используется комбинация метода конечных объемов (МКО) для пространственной дискретизации на неструктурированной сетке и FDTD-подход для интегрирования по времени.

3. Проблема граничных условий и предлагаемый метод

Реализация численного аналога волнового уравнения для внутренних узлов сетки не вызывает затруднений. А вот постановка условий на границах расчетной области для многомерных волновых уравнений является сложной задачей. Использование простых условий Дирихле ($\phi = 0$) или Неймана ($\partial\phi/\partial n = 0$) приводит к полному отражению волны от границы обратно в расчетную область. Узким местом при решении волновых уравнений являются поглощающие граничные условия (ПГУ, или Absorbing Boundary Conditions, ABC) – это граничные условия для поглощающей среды или открытых границ.

В литературе традиционно выделяют три основных подхода к построению поглощающих граничных условий [6, 7].

- Для одномерного случая используют классический подход, предложенный G. Mur в 1981 г., основанный на выражении: $\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi = 0$. Данный подход прост в реализации, но обеспечивает коэффициент отражения порядка 1–5%.

Для многомерных задач используют два метода:

- Слои идеального согласования (PML, Perfectly Matched Layer), предложенный J.P. Berenger в 1994 г. На сегодня – золотой стандарт для большинства задач. Идея не в постановке условия на границе, а в создании вокруг расчетной области дополнительных слоев искусственной среды с комплексными параметрами, обеспечивающей затухание волн без отражения на границе раздела сред. Существует множество модификаций: UPML (Uniaxial PML), CPML (Convolutional PML) и др. PML обеспечивает отражение на уровне 0,01–0,1%, но требует расширения расчетной области и введения дополнительных параметров (профиль проводимости, толщина слоя), подбор которых может влиять на устойчивость счета.
- Демпфирующие слои (Sponge Layers). Один из наиболее ранних и интуитивно понятных подходов к поглощению волн. Идея метода заключается в добавлении вокруг расчетной области дополнительных слоев, в которых искусственно вводится затухание (демпфирование) поля. В простейшем случае волновое уравнение модифицируется путем добавления демпфирующего члена:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi + \gamma(\vec{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

где $\gamma(\vec{r})$ – коэффициент затухания, который плавно возрастает от нуля на внутренней границе слоя до максимального значения на внешней границе.

Ключевое преимущество демпфирующих слоев – простота реализации и устойчивость. Однако классические демпфирующие слои создают паразитные отражения. Для минимизации отражений требуется плавное нарастание затухания на достаточной толщине слоя (обычно 10–20 длин волн), что приводит к значительным вычислительным затратам.

Сравнение рассмотренных методов по ключевым характеристикам представлено в таблице 1.

Таблица 1. Сравнение типов поглощающих граничных условий

Характеристика	Mur	PML	Sponge Layers
Коэффициент отражения	3% – 10%	0,01% – 0,1%	0,3% – 3%
Расширение области	Нет	Да (5–10 ячеек)	Да (10–20 ячеек)
Вычислительные затраты	Низкие	Низкие	Средние
Сложность реализации	Низкая	Высокая	Низкая
Устойчивость	Хорошая	Чувствителен выбору параметров	Хорошая

При решении уравнений движения и самосогласованных уравнений поля (Максвелла), погрешность по полю составляет $1 \cdot 10^{-3}$. Соответственно минимальный коэффициент отражения от поглощающей границы должен быть не более $1 \cdot 10^{-3}$. Кроме того на метод создания ГУ должно накладываться важнейшее условие для PIC метода – быстрое действие.

Поэтому основной целью работы являлась разработка поглощающих граничных условий с коэффициентом отражения $1 \cdot 10^{-3}$ и с минимальным количеством дополнительных слоев, предпочтительно без их введения.

4. Дискретная модель

В данной работе предлагается ПГУ без добавления слоев для ускорения расчета. Для граничного элемента дискретный аналог удобно представить в следующем виде: временную составляющую уравнения (2) дискретизовать по схеме FDTD, а пространственную – методом конечных объемов МКО, добавив поглощающую составляющую:

$$\frac{\varphi_i^{+1} - 2\varphi_i^0 + \varphi_i^{-1}}{c^2 \Delta t^2} V_i - \sum_{j=1}^J \nabla \varphi_i^0 \vec{S}_{ij} + \sum_{j=1}^J (\sigma_{ij}) \frac{\varphi_i^0 - \varphi_i^{-1}}{c \Delta t} S_{ij} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} V_i \quad (4)$$

где Δt – шаг по времени, φ_i^0 – значение потенциала в i -том элементе, V_i – объем конечного элемента, S_{ij} – площадь грани i -того элемента, σ_{ij} – коэффициент поглощения. Коэффициент поглощения может меняться от 0 до 1, где $\sigma_{ij} = 0$ отражающая граница, $\sigma_{ij} = 1$ максимальное поглощение. Коэффициент задается на гранях элемента, а не в объеме элемента. А стационарные граничные условия (Дирихле и Неймана) задаются во второй сумме согласно МКО.

Апробация метода была проведена на 2D задаче с точечным источником и открытыми границами. Результаты моделирования показаны на рисунке 1. Результаты моделирования показали, что коэффициент отражения составил менее 0,5% по максимуму амплитуды волны, а по энергии менее 0,01%.

5. Заключение

Разработана модель поглощающего граничного условия для волнового уравнения,

обеспечивающая коэффициент отражения менее 0,5% без введения дополнительных слоёв. Отсутствие поглощающих слоёв обеспечивает высокую скорость расчёта, поскольку для PML-метода, являющегося стандартным подходом, для достижения сопоставимого уровня отражения требуется не менее пяти дополнительных слоёв, что приводит к увеличению вычислительных затрат примерно на 30%.

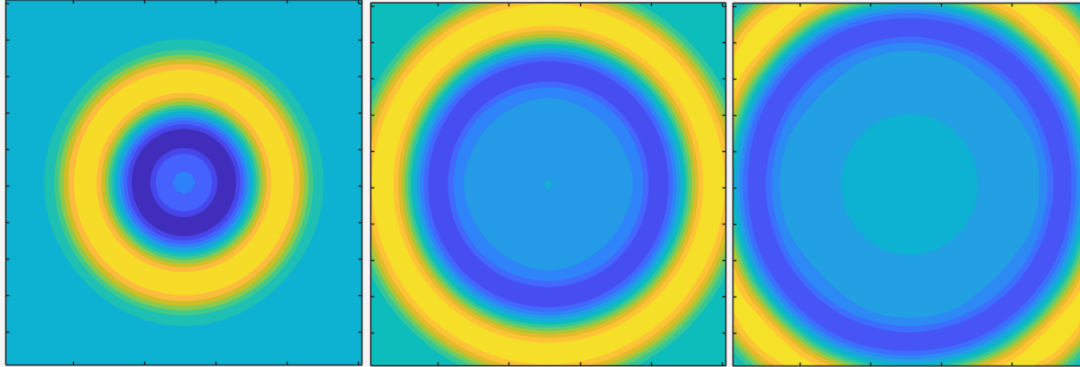


Рисунок 1. Распространение волны от точечного источника.

Достигнутая точность достаточна для самосогласованного решения уравнений движения частиц и уравнений поля в PIC-методе, при этом скорость расчёта поля является критически важным фактором для подобных задач.

Предложенный подход может рассматриваться как альтернатива PML для решения динамических задач электронной оптики, построенного на 2,5D PIC-методе. Кроме того, предложенный подход открывает возможность моделирования собственного магнитного поля электронных пучков в 2,5D – постановке на основе нестационарных уравнений Максвелла в калибровке Лоренца, поскольку использование закона Био — Савара — Лапласа в двумерной постановке некорректно.

В дальнейшем планируется переписать расчётный модуль поля в ПО «Elisa», заменив уравнение Пуассона на нестационарные уравнения Максвелла в калибровке Лоренца.

Список литературы

1. Куликова, И. В. Модели эмиттеров в ПО "Elisa" / И. В. Куликова, Н. К. Приступчик // Электроника и микроэлектроника СВЧ. – 2025. – Т. 1. – С. 145-148.
2. Куликова И.В., Приступчик Н.К. Разработка ПО на основе Лагранжева описания движения частиц для неструктурированных сеток. Сборник докладов XIII Всероссийской научно-технической конференции "Электроника и микроэлектроника СВЧ". СПб.: СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2024, С. 108-111.
3. C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmesh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. International Journal for Numerical Methods in Engineering 79(11). – 2009. – pp. 1309-1331.
4. Морев С.П., Якунин А.Н. Исследование особенностей процессов управления током пучка в электронно-оптических системах приборов О-типа // Электронная техника. Сер.1, Электроника СВЧ. - 1987. - Вып. 5.- С. 31-35.
5. Куликова И.В., Приступчик Н.К. Особенности моделирования переходных процессов в нерелятивистской электронной оптике. XII Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии – ЛаПлаз2026»: Сборник научных трудов. М.: НИЯУ МИФИ, 2026. – С 155.
6. Petropoulos P.G. A reflectionless sponge layer absorbing boundary condition for the solution of Maxwell's equations with high-order staggered finite difference schemes // Journal of Computational Physics. – 1998. – Vol. 139, No. 1. – P. 184-208.
7. Petropoulos P.G. Reflectionless sponge layers for the numerical solution of Maxwell's equations in cylindrical and spherical coordinates // Applied Numerical Mathematics. – 2000. – Vol. 33, No. 1-4. – P. 517-524.