

Перспективные методы диагностики ламинарных фаз в ансамбле радиально-связанных осцилляторов Лоренца

А.А. Буцык, В.В. Перепеловский

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

Аннотация: в данной работе предлагается новый подход к исследованию режима перемежаемости ламинарных и турбулентных фаз в ансамбле радиально-связанных осцилляторов Лоренца. Предложенный подход основан на оценке близости состояния ансамбля к стационарному. Показано, что ламинарные фазы реализуются при прохождении фазовой траектории ансамбля в окрестности стационарных точек, что соответствует перемежаемости типа *I*. Предложено две метрики близости состояния ансамбля к стационарному и метод определения стационарных точек ансамбля, основанный на методе последовательных возмущений. Предложенные метрики позволяют эффективно выявлять ламинарные и турбулентные фазы во временных рядах исследуемого ансамбля осцилляторов и раскрывают особенности формирования и эволюции ламинарных фаз.

Ключевые слова: аттрактор Лоренца, детерминированный хаос, перемежаемость, турбулентность, ансамбль нелинейных осцилляторов, нелокальная связь, теория возмущений, метод последовательных возмущений, стационарные точки, равновесные точки, стационарное состояние, евклидова метрика.

1. Введение

Исследование перемежаемости ламинарных и турбулентных фаз в ансамблях связанных осцилляторов представляет фундаментальный интерес для нелинейной динамики и теории сложных систем [1]. Явление перемежаемости наблюдается в широком классе физических и биологических систем: в нейронных системах феномен проявляется как чередование спайковой активности и покоя [2], в гидродинамике перемежаемостью объясняется возникновение турбулентных пятен в ламинарных потоках [1, 2], в лазерных системах наблюдается в виде резких переключений между режимами генерации [3], в мерцании квантовых точек - в виде чередования фаз со сложной флуктуационной динамикой и стационарными режимами флуоресценции [4], в волнах пространственного заряда – в виде хаотического переключения между модами [5], в турбулентном поведении плазмы [6], в динамике волновых функций, порождаемой нелинейным уравнением Шрёдингера [2], в переходах Джозефсона в виде чередования сверхпроводящих и несверхпроводящих состояний тонкого диэлектрического слоя, разделяющего два сверхпроводника [7], в сигналах ЭЭГ [2]. Перспективными направлениями прикладного применения данных исследований являются диагностика пространственной структуры квантовых точек [5], высокоэффективное машинное обучение [8], нейронаука, медицина и прогнозирование экономических циклов, обладающих перемежающейся динамикой [2].

Существует несколько типов перемежаемости в хаотических системах: тип *I* - тангенциальная бифуркация, тип *II* - субгармоническая бифуркация Хопфа, тип *III* - обратная бифуркация периода-удвоения и тип *on-off* - кризисный механизм [1, 2]. Возникновение ламинарных фаз в случае перемежаемости типа *I* обусловлено прохождением фазовой траектории системы в окрестности стационарной точки

системы. Данное свойство лежит в основе предлагаемого в данном исследовании метода диагностики перемежаемости.

Существующие теоретические подходы исследования перемежаемости основаны на анализе динамики спектра локальных показателей Ляпунова [9, 10], анализе wavelet-спектров временных рядов системы [10, 11], анализе динамики вспомогательной системы [12], оценке фрактальной размерности аттракторов, существующих в фазовом пространстве динамической системы [13]. В данной же работе предлагается подход, основанный на оценке близости состояния ансамбля к стационарному. В рамках данного подхода предлагается метод определения стационарных состояний ансамблей хаотических осцилляторов и два метода динамической оценки близости состояния ансамблей осцилляторов к стационарному, позволяющих выявлять ламинарные фазы во временных рядах, порождаемых динамической системой.

2. Исследуемый ансамбль осцилляторов

В качестве модельной среды для апробации предложенных теоретических подходов в данной работе используется ансамбль радиально-связанных осцилляторов (далее *RTLE*). *RTLE* подразделяется на центральный осциллятор, связанный со всеми другими осцилляторами системы однородными взаимными диссипативными связями (ε), и периферийные осцилляторы, каждый из которых связан только с центральным осциллятором, в результате чего в данном ансамбле реализуется нелокальная связь между периферийными осцилляторами через центральный осциллятор [10]. Стандартные параметры осцилляторов и величина параметра связи задаются одинаковыми для всех осцилляторов ансамбля, что позволяет упростить анализ динамики ансамбля, избежав возникновения нескольких типов перемежаемости, обусловленных различными механизмами возникновения. Кроме того, данная топология является наиболее простым способом ввести нелинейное нелокальное взаимодействие между осцилляторами.

В качестве осциллятора, демонстрирующего хаотическое поведение, используется система нелинейных ДУ Лоренца [14]. Динамика *RTLE*, состоящего из таких осцилляторов, при некоторых значениях стандартных параметров (σ, ρ, β) и параметра связи (ε) демонстрирует перемежаемость ламинарных и турбулентных фаз типа *I*, обусловленную гетерогенностью топологии связей. Как будет показано далее, ламинарные фазы реализуются в окрестности стационарных состояний ансамбля.

В обобщенном виде оператор эволюции [15] данного ансамбля может быть представлен в виде системы автономных ДУ следующего вида:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\Lambda}(\vec{R}) + \varepsilon \widehat{A}\vec{R}, \quad (1)$$

где \vec{R} - вектор состояния ансамбля, задающий точку в фазовом пространстве ансамбля, составленный из координат состояния $(x_j, y_j, z_j, j = 1, 2, \dots)$ всех осцилляторов ансамбля:

$$\vec{R} = x_1 \vec{e}_1^x + y_1 \vec{e}_1^y + z_1 \vec{e}_1^z + \dots + x_j \vec{e}_j^x + y_j \vec{e}_j^y + z_j \vec{e}_j^z + \dots,$$

$\vec{\Lambda}(\vec{R})$ - составляющая, описывающая собственные колебания осцилляторов системы (правая часть системы ДУ Лоренца), $\widehat{A}\vec{R}$ - составляющая, описывающая связи между осцилляторами ансамбля, в случае *RTLE* имеющая вид:

$$\widehat{A}\bar{R} = \sum_{j=2}^J \left[(x_j - x_1) \bar{e}_1^x + (y_j - y_1) \bar{e}_1^y + (z_j - z_1) \bar{e}_1^z \right] + \dots + (x_1 - x_j) \bar{e}_j^x + (y_1 - y_j) \bar{e}_j^y + (z_1 - z_j) \bar{e}_j^z + \dots$$

где \bar{e}_j^x , \bar{e}_j^y , \bar{e}_j^z - базисные векторы фазового пространства *RTLE*, соответствующие фазовому подпространству *j*-го осциллятора.

3. Метрики близости ансамбля к стационарному состоянию

Поскольку ламинарные фазы реализуются в окрестностях стационарных точек ансамбля, задачу их выявления можно свести к оценке дистанции между текущим и стационарным состояниями ансамбля. Введем две метрики:

$$F(\bar{R}) = \sum_k \frac{1}{|\bar{R} - \bar{R}_k|^2}, \quad (2)$$

$$E(\bar{R}) = \frac{1}{|\varepsilon - \varepsilon_+(\bar{R})|^2}, \quad (3)$$

где \bar{R}_k - *k*-я стационарная точка в фазовом пространстве ансамбля, ε - параметр связи между осцилляторами исследуемого ансамбля, $\varepsilon_+(\bar{R})$ - величина параметра связи, обеспечивающая стационарное состояние в точке фазового пространства \bar{R} .

Обе метрики, *force factor* (2) и *epsilon factor* (3), являются оценками близости текущего состояния ансамбля \bar{R} к стационарному. Они возрастают при приближении системы к стационарной точке и стремятся к бесконечности при достижении стационарного состояния. Отличие состоит в том, что *force factor* определяется как сумма квадратов обратных евклидовых метрик в фазовом пространстве (\bar{R}) ансамбля, тогда как *epsilon factor* определяется как квадрат обратной евклидовой метрики в пространстве параметра связи (ε) ансамбля - таким образом, метрики имеют несколько разную природу. Ещё одним важным отличием является то, что метрика *epsilon factor* не требует вычисления стационарных точек ансамбля, в отличие от *force factor*, что значительно упрощает её применение. При этом преимуществом *force factor* является возможность парциального исследования индивидуальной стационарной точки или группы стационарных точек, посредством учета только исследуемых точек при суммировании в формуле (2).

Найдем вид функции $\varepsilon_+(\bar{R})$, используемой для расчета *epsilon factor*. Стационарное состояние ансамбля описывается условием равенства нулю оператора эволюции ансамбля (1):

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = 0 \quad (4)$$

Из условия (4) видно, что в стационарном состоянии квадрат модуля оператора эволюции ансамбля также равен нулю:

$$\left| \frac{d\bar{R}}{dt} \right|^2 = 0 \quad (5)$$

Таким образом, из (1) и (5) следует:

$$|\widehat{AR}|^2 \varepsilon^2 + 2(\overline{\Lambda}(\overline{R}), \widehat{AR})\varepsilon + |\overline{\Lambda}(\overline{R})|^2 = 0 \quad (6)$$

Уравнение (6) является квадратным уравнением относительно параметра связи (ε). Решением данного уравнения является величина параметра связи, обеспечивающая стационарное состояние в точке фазового пространства \overline{R} :

$$\varepsilon_{+,-}(\overline{R}) = \frac{1}{|\widehat{AR}|^2} \left(-(\overline{\Lambda}(\overline{R}), \widehat{AR}) \pm \sqrt{(\overline{\Lambda}(\overline{R}), \widehat{AR})^2 - |\overline{\Lambda}(\overline{R})|^2 |\widehat{AR}|^2} \right) \quad (7)$$

Из (7) следует, что корни уравнения (6) везде комплексные за исключением точек, в которых выражение под корнем равно нулю (в этих точках угол между векторами $\overline{\Lambda}(\overline{R})$ и \widehat{AR} составляет π). Так как комплексно-сопряженные корни $\varepsilon_{+,-}$ симметричны, для расчета (3) достаточно рассмотреть только один корень $\varepsilon_+(\overline{R})$.

4. Метод определения стационарных точек исследуемого ансамбля

Для расчета величины *force factor* (2) необходимо определить стационарные точки исследуемого ансамбля. Предлагаемый в данной работе подход основан на методе последовательных возмущений [16]. В 0-ой итерации метода рассматривается задача определения стационарных точек ансамбля (4) в случае равенства параметра связи (ε) нулю:

$$\overline{\Lambda}(\overline{R}) = 0. \quad (8)$$

Из (8) видно, что в этом случае каждый осциллятор ансамбля является независимым от других осцилляторов. Таким образом, стационарным состоянием ансамбля в этом режиме является любая комбинация известных стационарных состояний независимых осцилляторов Лоренца. В 1-ой итерации рассмотрим возмущенную по параметру связи задачу:

$$\overline{\Lambda}(\overline{R}) + \delta\varepsilon_1 \widehat{AR} = 0, \quad (9)$$

где $\delta\varepsilon_1$ - малый параметр – малое отклонение параметра связи от 0. Согласно теории возмущений представим решение задачи (8) в виде разложения в ряд по степеням малого параметра $\delta\varepsilon_1$:

$$\overline{R}_1 = \overline{R}^{(0)} + \delta\varepsilon_1 \overline{R}^{(1)} + \delta\varepsilon_1^2 \overline{R}^{(2)} + \dots, \quad (10)$$

где $\overline{R}^{(0)}$ - известное решение невозмущенной задачи (8), $\overline{R}^{(1)}$, $\overline{R}^{(2)}$, ... - поправки к невозмущенному решению соответствующего порядка. Решая задачу (9) согласно стандартному алгоритму теории возмущений и учитывая необходимое число поправок к решению для достижения требуемой точности, находим стационарные состояния ансамбля \overline{R}_1 при величине коэффициента связи $\varepsilon = \delta\varepsilon_1$. На 2-ой, 3-ей, ..., k -ой итерациях рассматриваем возмущенную задачу:

$$\overline{\Lambda}(\overline{R}) + (\varepsilon_{k-1} + \delta\varepsilon_k) \widehat{AR} = 0, \quad (11)$$

где $\delta\varepsilon_k$ - малый параметр задачи на k -ой итерации метода, $\varepsilon_{k-1} = \delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 + \dots + \delta\varepsilon_{k-1}$ - величина параметра связи невозмущенной задачи, полученная на предшествующих итерациях метода. Аналогично (10) представляем решение задачи (10) в виде

разложения в ряд:

$$\vec{R}_k = \vec{R}_{k-1} + \delta\varepsilon_k \vec{R}^{(1)} + \delta\varepsilon_k^2 \vec{R}^{(2)} + \dots, \quad (12)$$

где \vec{R}_{k-1} - решение задачи $(k-1)$ -ой итерации. Решая задачу (11), находим стационарные состояния ансамбля \vec{R}_k при величине параметра связи $\varepsilon = \varepsilon_{k-1} + \delta\varepsilon_k$. Таким образом, вышеописанная процедура позволяет определить стационарные состояния ансамбля при требуемой величине параметра связи ε .

5. Результаты исследования и обсуждение

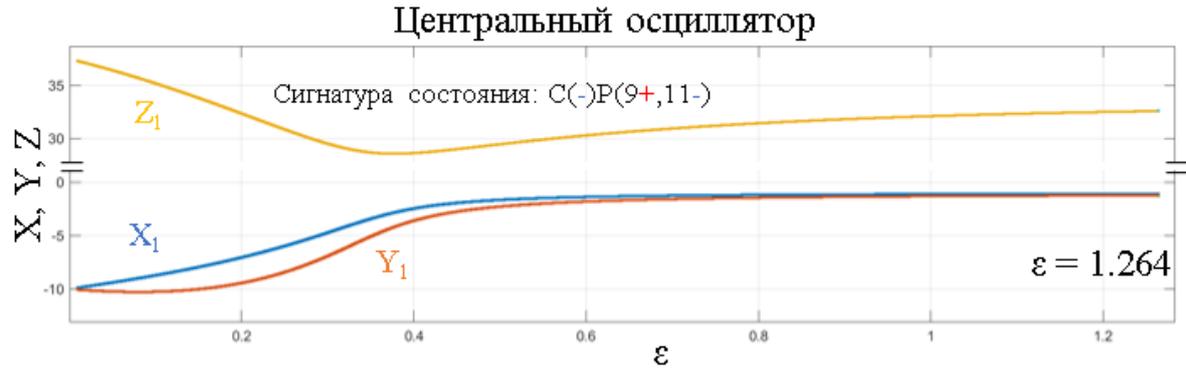


Рисунок 1. Зависимость положения стационарного состояния от величины параметра связи для центрального осциллятора ансамбля: X_1, Y_1, Z_1 – X -, Y -, Z -компоненты вектора состояния центрального осциллятора.

На графике рис.1 показано, как изменяется положение одной из стационарных точек ансамбля в процессе реализации алгоритма последовательных возмущений в подпространстве центрального осциллятора. Видно, что положение стационарной точки в фазовом пространстве ансамбля нелинейно зависит от величины параметра связи.

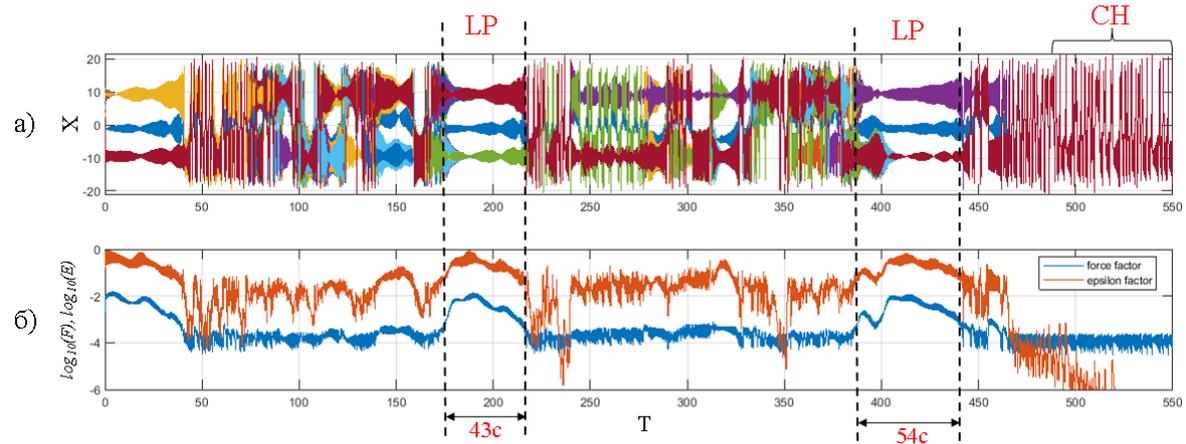


Рисунок 2. Динамика *force factor* (F) и *epsilon factor* (E) в процессе временной эволюции исследуемого ансамбля: а - динамика $X(t)$; б – динамика $\log_{10}(F)$ (синяя линия) и $\log_{10}(E)$ (красная линия); LP – продолжительные ламинарные фазы; CH – область синхронного хаоса.

Из рис. 2 видно, что в области реализации ламинарных фаз обе метрики возрастают, что свидетельствует о приближении ансамбля к стационарному состоянию. При этом коэффициент линейной корреляции между метриками составил 0.86, из чего следует их взаимозаменяемость при анализе перемежаемости. В силу

относительной простоты расчета *epsilon factor* разумно применять данную метрику.

6. Заключение

Исследован режим перемежаемости ламинарных и турбулентных фаз в ансамбле радиально-связанных осцилляторов Лоренца. Используются методы исследования, основанные на динамической оценке близости ансамбля к стационарному состоянию в фазовом пространстве (метрика *force factor*) и пространстве параметра связи (метрика *epsilon factor*). Для определения стационарных точек, используемых для расчета метрики *force factor*, использован подход, основанный на методе последовательных возмущений. Посредством данных метрик продемонстрировано приближение ансамбля к стационарному состоянию в области реализации ламинарных фаз. Коэффициент линейной корреляции между используемыми метриками составил 0.86.

Список литературы

1. Elaskar S., del Río E. Review of chaotic intermittency //Symmetry. – 2023. – Т. 15. – №. 6. – С. 1195.
2. Elaskar S., Del Río E. New advances on chaotic intermittency and its applications. – 2017.
3. Hramov A. E. et al. Separation of coexisting dynamical regimes in multistate intermittency based on wavelet spectrum energies in an erbium-doped fiber laser //Physical Review E. – 2016. – Т. 93. – №. 5. – С. 052218.
4. Kuno M. et al. Nonexponential “blinking” kinetics of single CdSe quantum dots: A universal power law behavior //The journal of chemical physics. – 2000. – Т. 112. – №. 7. – С. 3117-3120.
5. Зайко Ю. Н. Перемежаемость волн пространственного заряда //Письма в ЖТФ. – 2004. – Т. 30. – №. 11.
6. Chian A. C. L. et al. Nonlinear dynamics in space plasma turbulence: temporal stochastic chaos //Reviews of Modern Plasma Physics. – 2022. – Т. 6. – №. 1. – С. 34..
7. Ben-Jacob E. et al. Intermittent chaos in Josephson junctions //Physical Review Letters. – 1982. – Т. 49. – №. 22. – С. 1599.
8. Kong L. W. et al. Emergence of transient chaos and intermittency in machine learning //Journal of Physics: Complexity. – 2021. – Т. 2. – №. 3. – С. 035014.
9. Москаленко О. И., Евстифеев Е. В., Короновский А. А. Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации на основе расчета локальных показателей ляпунова //Письма в Журнал технической физики. – 2020. – Т. 46. – №. 16. – С. 12-15.
10. Буцык А. А., Перепеловский В. В. Энтропийный анализ диссипативных структур в ансамбле радиально-связанных осцилляторов Лоренца.
11. Евстифеев Е. В., Москаленко О. И. Применение непрерывного вейвлет-преобразования для определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации //НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА. – 2020. – С. 10.
12. Abarbanel H. D. I., Rulkov N. F., Sushchik M. M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach //Physical review E. – 1996. – Т. 53. – №. 5. – С. 4528.
13. Venkataramani S. C. et al. On-off intermittency: Power spectrum and fractal properties of time series //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1996. – Т. 96. – №. 1-4. – С. 66-99.
14. Lorenz E. Nonperiodic deterministic flow //J. Atmosph. Sciences. – 1963. – Т. 20. – С. 130.
15. Кузнецов С. П. Динамический хаос (курс лекций): Учеб. пособие для вузов. 2-е изд. перераб. и доп //М.: Издательство Физико-математической литературы. – 2006.
16. Murdock J. Perturbation methods //Mathematical Tools for Physicists. – 2005. – С. 385-415.