УДК

Численный анализ волновой динамики в сетях Вольтерра–Лотки

А.А. Белокур, В.В. Перепеловский

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

Аннотация: рассмотрено нелокальное обобщение уравнения Вольтерра-Лотки в пространственной и временной областях в рамках квазистационарного приближения. Численный анализ выявил наличие солитонных решений. Уделено внимание влиянию параметров системы на характер распространения возмущений.

Ключевые слова: уравнение Вольтерра–Лотки, солитоны, численное моделирование

1. Введение

Система уравнений Вольтерра–Лотки (В-Л) [1–3], первоначально предложенная для моделирования динамики взаимодействующих популяций в экологии, является одной из фундаментальных моделей нелинейной динамики. В классическом виде система описывает взаимодействие компонент типа «хищник–жертва»:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(\alpha - \beta y), \\ \frac{dy}{dt} &= -y(\gamma - \delta x), \end{aligned} \tag{1}$$

где x и y – функции, характеризующие численность популяций, а $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – параметры, характеризующие темпы роста, смертности и взаимодействия между видами.

В современных исследованиях уравнения Вольтерра–Лотки находят применение в химической кинетике [4], машинном обучении [5], а также при изучении самоорганизации в распределённых системах [6, 7].

Научная новизна работы заключается в разработке подхода к исследованию волновой динамики системы Вольтерра–Лотки в рамках квазистационарного приближения. Полученные результаты открывают новые возможности для анализа пространственно-временной динамики в системах с конкурирующими взаимодействиями.

2. Исследуемое уравнение

Для разделения динамики системы Вольтерра-Лотки на амплитудные и фазовые режимы рассмотрим уравнение (1) в полярных координатах:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r\left[\alpha\cos^2\theta \cdot \gamma\sin^2\theta\right] + r^2\cos\theta\cdot\sin\theta\left[\delta\sin\theta\cdot\beta\cos\theta\right], \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \cos\theta\cdot\sin\theta\left[\delta r\cos\theta + \beta r\sin\theta - (\alpha+\gamma)\right], \end{cases} \tag{2}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = arctan(\frac{y}{x})$.

Используя уравнения (2) получено волновое уравнение, аналогичное уравнению синус-Гордона [8,9] с нелинейностью Вольтерра-Лотки:

$$\frac{d^2r}{dt^2}-c^2\frac{d^2r}{dx^2}=\big(\alpha\cos^2\theta-\gamma\sin^2\theta+2r\cos\theta\sin\theta(\delta\sin\theta-\beta\cos\theta)\big)\cdot\frac{dr}{dt}+$$
$$+\left(r(-2\alpha\cos\theta\sin\theta+2\gamma\cos\theta\sin\theta)+\right.$$
$$\left.+r^2\left[\cos(2\theta)(\delta\sin\theta-\beta\cos\theta)+\cos\theta\sin\theta(\delta\cos\theta+\beta\sin\theta)\right]\right)\cdot\frac{d\theta}{dt} \tag{3}$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}-c^2\frac{d^2\theta}{dx^2}=(\cos\theta\sin\theta(\delta\cos\theta+\beta\sin\theta))\cdot\frac{dr}{dt}+$$
$$+(\cos(2\theta)(\delta r\cos\theta+\beta r\sin\theta-(\alpha+\gamma))+$$
$$+r\cos\theta\sin\theta(-\delta\sin\theta+\beta\cos\theta))\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

где c – скорость распространения волны.

Вывод волнового уравнения сопряжён с получением второй производной по времени $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, и добавлением пространственной компоненты $c^2\frac{d^2\theta}{dx^2}$, аналогично тому, как она вводится в уравнении синус-Гордона. Получаем среду, состоящую из связанных нелинейных элементов Вольтерра-Лотки. Назовём её нелинейная среда Вольтерра-Лотки.

Используя «квазистационарном» приближение, то есть допускаем, что радиальная компонента r остаётся постоянной, волновое уравнение (3) примет вид:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=c^2\frac{d^2\theta}{dx^2}+N(\theta) \tag{4}$$

$$N(\theta)=\cos\theta\,\sin\theta\,(\delta r_0\cos\theta+\beta r_0\sin\theta-(\alpha+\gamma))$$
$$\times\left[\cos(2\theta)+r_0\sin\theta\,(-\delta\sin\theta+\beta\cos\theta)\right] \tag{5}$$

где $N(\theta)$ – нелинейный член, получаемый из квазистационарного приближения системы. c – скорость распространения волны, r_0 – константа радиальной компоненты

Численное моделирование выполнялось с параметрами сетки, выбранными из условия Куранта [10]. Для построения солитонных решений в работе использована аналитическая форма кинк-солитона, изначально предложенная в решении уравнения синус-Гордона [8]:

$$\theta(\xi)=4\arctan\left(e^{\Gamma\xi}\right),\quad \xi=x-vt \tag{6}$$

где $\Gamma>0$ – параметр, отвечающий за ширину фронта солитона, v – скорость распространения возмущения.

Параметры уравнения (6) определялись методом минимизации невязки [12].

Невязка рассчитывалась по следующему уравнению:

$$\text{Residual}(\Gamma,v)=\left\|\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d^2\theta}{d\xi^2}-N(\theta)\right\|_2 \tag{7}$$

Невязка рассчитывается как норма разности между левой и правой частями уравнения при подстановке предполагаемого решения (6) в (4). Минимизация невязки проводилась методом Нелдера–Мида [13] с относительной точностью 10^{-4}. В результате значение невязки составило 10^{-3}, а относительная погрешность определения скорости – менее 2.5%. Получены значений Γ и v, при которых в уравнении (4) возникают солитонные решения. Результаты минимизации невязки определяли начальные условия уравнения (4).

3. Результаты численного моделирования

В этом разделе представлены основные виды решения волнового уравнения с нелинейностью Вольтерра-Лотки (4) в зависимости от параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, рассматривались в пределах от 0.1 до 1. На рисунке 1 представлен пример распространения двух солитонов. Направление распространения солитонов указано стрелками.

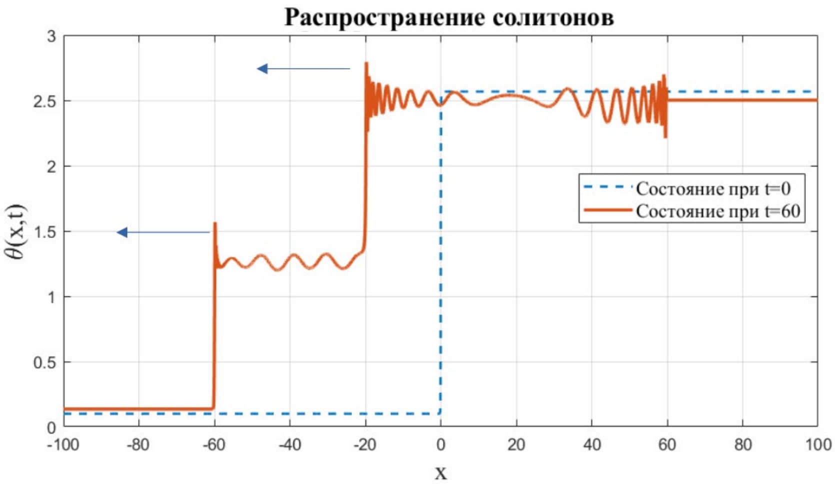

Рисунок 1. Результаты численного решение волнового уравнения с нелинейностью Вольтерра-Лотки в квазистационарном приближении. Начальное положение системы при $t = 0$ задавалось в виде ступеньки с учётом минимизации невязки (7) при следующих параметрах уравнения (4): $\alpha = 0.7, \beta = 0.5, \gamma = 0.3, \delta = 0.9$.

Рисунок 2 иллюстрирует динамику системы, при которой после прохождения двух солитонов в противоположных направлениях, нелинейная среда Вольтерра-Лотки переходит в новое состояние.

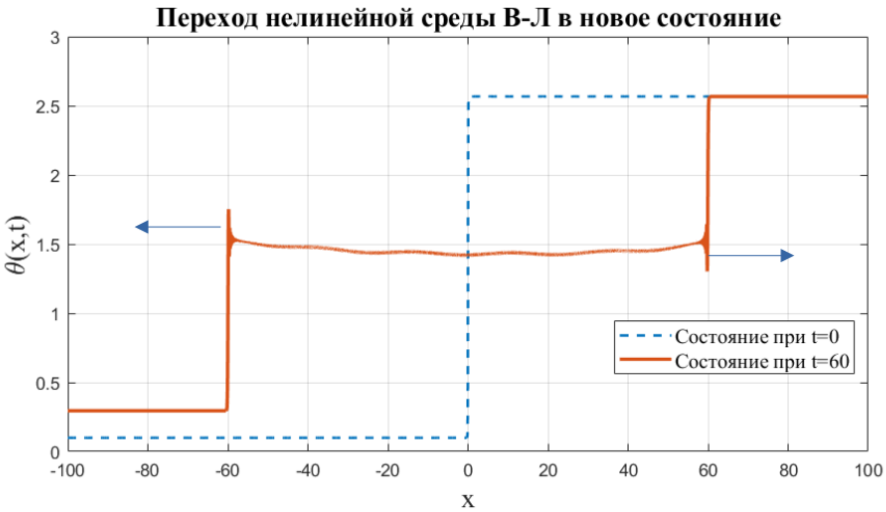

Рисунок 2. Результаты численного решение волнового уравнения с нелинейностью Вольтерра-Лотки в квазистационарном приближении. Начальное положение системы при $t = 0$ задавалось в виде ступеньки с учётом минимизации невязки при следующих параметрах уравнения (4): $\alpha = 0.3, \beta = 0.3, \gamma = 0.1, \delta = 0.3$.

Полученное решения на рисунке 2 качественно согласуются с видом решения реакции Белоусова–Жаботинского [15]. Наблюдается переход в новое состояние системы.

При определенных значениях параметров уравнения (4), наблюдаются пространственно-неоднородные решения напоминающих хаотические фронты [16] (рисунок 3).

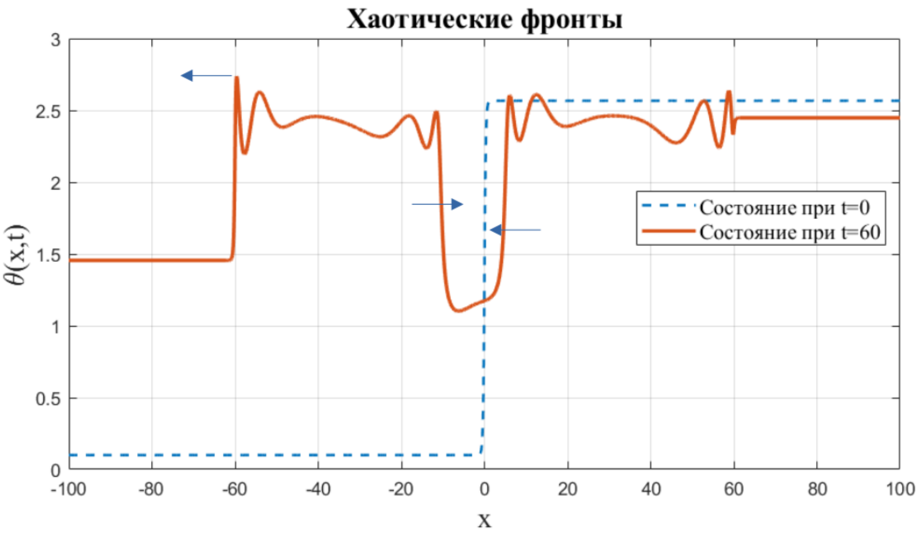

Рисунок 3. Результаты численного решение волнового уравнения с нелинейностью Вольтерра-Лотки в квазистационарном приближении. Начальное положение системы при $t = 0$ задавалось в виде ступеньки с учётом минимизации невязки при следующих параметрах уравнения (4): $\alpha = 0.3, \beta = 0.1, \gamma = 0.1, \delta = 0.3$.

Данные решение качественно согласуются с поведением реакционно-диффузионных систем: наблюдаются устойчивые волновые фронты, солитоны и хаотические фронты, как например в модели ФитцХью–Нагумо [16], упрощённая модель нейрона.

Для изучения влияния параметров на поведение решений уравнения (4) проводится варьирование их значений относительно базовых: $\boldsymbol{\alpha = 0.5, \beta = 0.5, \gamma = 0.5, \delta = 0.5}$. Каждый из параметров оказывает заметное влияние на характер волновой динамики в среде с нелинейностью В-Л. Ниже представлен анализ вклада параметров в формирование различных типов решений, возникающих в данной среде. Внимание уделено компонентам решения, на которые оказывают наибольшее влияние соответствующие параметры. Параметр α влияет на существование солитонных решений: при $\boldsymbol{\alpha < 0.5}$ численный алгоритм демонстрирует тенденцию к расходимости, тогда как при увеличении α достигается устойчивая минимизация невязки (7). Параметр $\boldsymbol{\beta}$ определяет спектральные характеристики отклика среды – при его увеличении усиливается вклад высокочастотных компонент, возникающих в ответ на возмущение. Параметр $\boldsymbol{\gamma}$ регулирует число формирующихся солитонных и хаотических фронтов: при его увеличении за фиксированный промежуток времени наблюдается рост числа возникающих структур. Увеличение $\boldsymbol{\delta}$ приводит к формированию фронтов с более выраженными амплитудными градиентами. Таким образом, параметры $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ определяют механизмы формирования пространственно-временной структуры решений.

4. Заключение

Рассмотрена пространственно-временная динамика в среде волнового уравнения с нелинейностью Вольтерра–Лотки в квазистационарном приближении. Полученная модель волнового уравнения с нелинейностью В-Л (3) редуцирована к волновому уравнению в квазистационарном приближении (4), что обеспечило возможность анализа её эволюции через солитонные решения. Расчёты показали, что характеристики этих решений существенно зависят от параметров уравнения (4). Выявлено формирование сложных пространственно-временных структур, эквивалентных структурам реакционно-диффузионных системах. Это сходство открывает возможность дальнейшего исследования модели в рамках теории реакционно-диффузионных процессов, в том числе для описания распространения пожаров [19] и эпидемических волн в пространственно-временном представлении.

Список литературы

1. Титов В. А., Вейнберг Р. Р. Анализ существующих динамических моделей на базе системы уравнений Лотки-Вольтерры" хищник-жертва" //Фундаментальные исследования. – 2016. – №. 8-2. – С. 409-413.
2. Бибик Ю. В., Саранча Д. А. Канонические переменные для некоторых биологических моделей //Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22. – №. 3. – С. 120-144.
3. Reali F., Priami C., Marchetti L. Optimization algorithms for computational systems biology //Frontiers in Applied Mathematics and Statistics. – 2017. – Т. 3. – С. 6.
4. Ромашев Ю. А., Скоробогатов Г. А. Детерминистское и стохастическое моделирования экосистемы (жертва-хищник), химической системы (горючее-окислитель), экономической системы (ресурсы-индустрия) //Экологическая химия. – 2011. – Т. 20. – №. 3. – С. 129-149.
5. Mahdavi-Damghani B., Roberts S. A proposed risk modeling shift from the approach of stochastic differential equation towards machine learning clustering: Illustration with the concepts of anticipative & responsible VaR //Available at SSRN 3039179. – 2017.
6. Huang T. et al. Pattern self-organization and pattern transition on the route to chaos in a spatiotemporal discrete predator–prey system //Advances in Difference Equations. – 2018. – Т. 2018. – С. 1-21.
7. Bazeia D., Bongestab M., de Oliveira B. F. Chaotic behavior in Lotka–Volterra and May–Leonard models of biodiversity //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2024. – Т. 34. – №. 5
8. Dodd R. K. et al. Solitons and nonlinear wave equations. – 1982.
9. Wazwaz A. M., Wazwaz A. M. Solitary waves theory //Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. – 2009. – С. 479-502.
10. Курант Р. Методы математической физики. – Рипол Классик, 2013.
11. Нефедов Н. Н., Дерюгина Н. Н. Существование и устойчивость стационарного решения с пограничным слоем системы уравнений реакция-диффузия с граничными условиями Неймана //Теоретическая и математическая физика. – 2022. – Т. 212. – №. 1. – С. 83-94.
12. Kivshar Y. S., Malomed B. A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems //Reviews of Modern Physics. – 1989. – Т. 61. – №. 4. – С. 763.
13. Ouria A., Toufigh M. M. Application of Nelder-Mead simplex method for unconfined seepage problems //Applied Mathematical Modelling. – 2009. – Т. 33. – №. 9. – С. 3589-3598.
14. Field R. J., Noyes R. M. Oscillations in chemical systems. IV. Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction //The Journal of Chemical Physics. – 1974. – Т. 60. – №. 5. – С. 1877-1884.
15. Zaikin A. N., Zhabotinsky A. M. Concentration wave propagation in two-dimensional liquid-phase self-oscillating system //Nature. – 1970. – Т. 225. – №. 5232. – С. 535-537.
16. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane //Biophysical journal. – 1961. – Т. 1. – №. 6. – С. 445-466.
17. Epstein I. R., Pojman J. A. An introduction to nonlinear chemical dynamics: oscillations, waves, patterns, and chaos. – Oxford university press, 1998.
18. Nicolis G. prigogine, I.(1989).“Exploring complexity: an introduction”.
19. Шваров Н. Н., Хасан Я., Фахми Ш. С. Метод автоматизированного обнаружения и исследования лесных пожаров //Наука настоящего и будущего. – 2018. – Т. 1. – С. 119-123.