

# Аналитическое решение задачи определения эффективной глубины скин-слоя в электродинамических структурах с учетом шероховатости

Д.А. Котова<sup>1,2</sup>, А.С. Седов<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН

<sup>2</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского

<sup>3</sup> ЗАО «НПП «ГИКОМ»

**Аннотация:** в данной работе была аналитически решена задача определения коэффициента, показывающего отличие эффективной величины скин-слоя в зависимости от величины шероховатости поверхности электродинамических структур. Данный коэффициент, в частности, определяет влияние шероховатости на омическую добротность резонаторов электровакуумных приборов. В расчетах была подобрана функция усредненного разделения проводимости, позволяющая решить уравнение на скин-слой аналитически. Далее представлены результаты решения уравнения на эффективный скин-слой, в том числе формула для описанного выше коэффициента в зависимости от размера шероховатости поверхности.

**Ключевые слова:** гиротрон, терагерцовый диапазон, шероховатость, скин-слой

## 1. Введение

Одной из проблем, решаемых при разработке и проектировании приборов вакуумной СВЧ электроники, является обработка поверхности электродинамических структур. При этом неизбежно возникает шероховатость поверхности, которая в том числе влияет на омические потери в данных структурах. Особенно этот эффект проявляется в приборах субтерагерцового и терагерцового диапазона частот [1], в которых характерный размер скин-слоя становится порядка или даже меньше среднего размера шероховатости. При этом в гиротронах данного диапазона, которые обычно имеют низкое КПД и относительно длинную регулярную часть резонатора омическая добротность чаще всего одного порядка или ниже дифракционной. Таким образом, общая добротность, во многом определяемая омической, влияет на стартовые условия возбуждения и фактически на выбор рабочего режима. Таким образом, адекватный анализ шероховатости является достаточно важной научной и прикладной задачей.

Обычно шероховатость учитывается в формуле для омической добротности введением коэффициента  $k_{skin}$ , который показывает отличие реальной глубины скин-слоя от глубины в случае абсолютно гладкого резонатора. В большинстве случаев данный коэффициент является эмпирическим и берется равным 2, однако согласно некоторым исследованиям он может отличаться [2]. Наиболее подробные измерения были получены экспериментально [3], однако при больших размерах шероховатости наблюдался случайный характер зависимости.

Существует несколько основных моделей и методик расчета данного эффекта. В частности, можно использовать модель, усредняющую шероховатость вдоль поверхности границы раздела металл-вакуум [4]. При этом проводимость данной системы моделируется путем относительно непрерывного перехода от вакуума к металлу вдоль оси падения излучения. Проводимости в случае гладкого резонатора соответствует функция Хевисайда, умноженная на проводимость идеального металла (то есть глубоко внутри вещества). В случае наличия шероховатости под данный

переход подходит функция распределения нормального распределения, которая быстро падает, что позволяет оценить пределы интегрирования, а также интуитивно понятно связана с размером шероховатости, который соответствует дисперсии производной данной функции. В результате уравнение на скин-слой с данной функцией было решено численно [5].

Однако при численном решении уравнений по данной модели возникает две основные проблемы. Первая связана с наличием экспоненциально возрастающего решения. Аналитически такое решение приравнивается к нулю, численно же это сделать не предоставляется возможность. Вторая связана с предельным переходом к случаю гладкого резонатора, то есть наличие шероховатостей меньше толщины скин-слоя. Для этого необходимо подбирать параметры численной модели вручную.

Таким образом для проверки правильности данного подхода была предпринята попытка аналитически решить данную задачу специально подобрав функцию проводимости.

## 2. Аналитическая модель

Уравнение на скин-эффект на гладких поверхностях проводников выводится из уравнений Максвелла, предполагающих плоскую границу между вакуумом и проводником. Это соответствует резкому переходу от практически нулевой проводимости к проводимости металла. В рассматриваемых далее моделях с учетом шероховатости поверхности проводимость металла является функцией, от координаты вдоль которой распространяется излучение. Таким образом, уравнение для расчета распределения амплитуды ВЧ-поля (в данном случае берется магнитное поле) с граничными условиями (1) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 B_{||}}{\partial x^2} - i\omega\mu_0\sigma(x)B_{||} - \frac{\partial}{\partial x} \ln\sigma(x) * \frac{\partial B_{||}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$B_{||}(-\infty) = 1 \quad B_{||}(+\infty) = 0$$

где  $\omega$  – круговая частота колебаний,  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $\sigma(x)$  – функция проводимости, которая должна иметь характерный масштаб изменения (перехода между вакуумом и металлом) пропорциональный размеру шероховатости и граничные условия (2):

$$\sigma(-\infty) = 0 \quad \sigma(+\infty) = \sigma_0 \quad (2)$$

В качестве функции проводимости (3) (Рисунок 1) была использована функция, при которой уравнение для скин-слоя с функцией проводимости (1) решается аналитически [6].

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0 \left(\frac{x_0}{x}\right)^2, & x < x_0 \\ \sigma_0, & x \geq x_0 \end{cases} \quad (3)$$

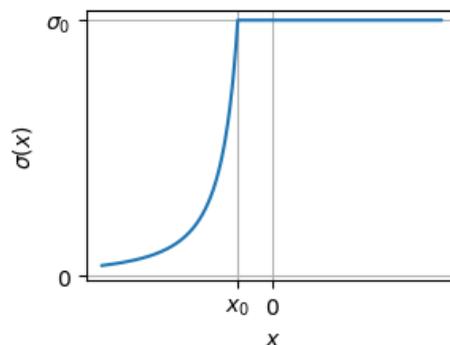


Рисунок 1. Функция проводимости

Параметр  $x_0$  подбирается из условий, что производная функции проводимости

имеет среднеквадратическое отклонение равное величине шероховатости (4).

$$D[\sigma(x)] = \frac{R_0^2}{N^2} \quad (4)$$

$$x_0 = -R_0 \frac{1}{\sqrt{N^4(-4 + 2\ln N) + 8N^3 - 8N^2 + 8N - 4}}$$

В силу вида выбранной функции при  $N \rightarrow \infty$ , то  $x_0 \rightarrow 0$  и в дальнейшем  $N$  подбиралось из условий, что оно должно быть много больше единицы, чтобы значение проводимости на левом конце интегрирования можно было считать малым, но не больше определённого значения, чтобы интеграл не расходился.

Результаты численного моделирования и аналитические оценки показывают, что в выбранном диапазоне параметров третье слагаемое в уравнении (1) мало и в дальнейшем им можно пренебречь.

При решении уравнения (1) возникает проблема извлечения квадратного корня из мнимой единицы, который имеет 2 значения. При этом из двух значений выбирается такое, которое соответствует спадающему решению при увеличении координаты  $x$ , то есть при распространении излучения внутрь металла. При этом аналитическое решение на магнитное поле имеет следующий вид (5) (Рисунок 2).

$$B_{||}(x) = \left(\frac{x}{Nx_0}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+16(\omega\mu_0\sigma_0x_0^2)+1}}{2\sqrt{2}}} + i \frac{\sqrt{1+16(\omega\mu_0\sigma_0x_0^2)-1}}{2\sqrt{2}} \quad (5)$$

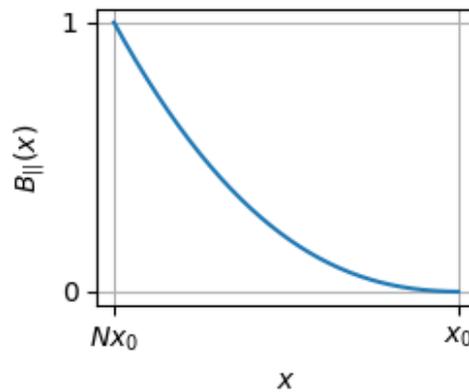


Рисунок 2. График функции магнитного поля при  $\omega\mu_0\sigma_0 = 1, x_0 = -7$ ,

Далее необходимо вычислить интегральные потери вдоль направления распространения волны (6):

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|j(x)|^2}{2\sigma(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_{||}}{\partial x} \right|^2 dx \quad (6)$$

Главной задачей является определение эффективной проводимости  $\sigma_{eff}$ , то есть такой проводимости, при которой потери при нормальном падении волны на идеально плоскую границу равны потерям на поверхность с шероховатостью.

Математически это можно выразить следующей формулой (7)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_{||}}{\partial x} \right|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|j_{smooth}(x)|^2}{2\sigma_{eff}} dx \quad (7)$$

где правая часть – интегральные потери в случае падения плоской волны на гладкую границу раздела двух сред и равна (8)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|j_{smooth}(x)|^2}{2\sigma_{eff}} dx = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\sigma_{eff}}(2\mu_0)^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

Коэффициент, показывающий отличие реальной глубины скин-слоя от глубины в случае абсолютно гладкого резонатора, рассчитывается по следующей формуле (9):

$$k_{skin} = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_{eff}}} \quad (9)$$

где  $\sigma_0$  – идеальная проводимость металла.

Таким образом, коэффициент  $k_{skin}$  определяется как (10):

$$k_{skin} = \sqrt{\frac{2\sigma_0}{\omega\mu_0} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \frac{\partial B_{||}}{\partial x} \right|^2}{\sigma(x)} dx \right)} \quad (10)$$

Также необходимо перейти от размерных величин к безразмерным с помощью формулы (4) и формулы толщины скин-слоя  $\delta$ . Таким образом, коэффициент  $k_{skin}$  в данной модели выглядит следующим образом (12).

$$k_{skin} = \left( N^{-\sqrt{\frac{1+64\left(\frac{x_0}{\delta}\right)^4+1}{2}}} - N^2 \right) \frac{1 + \sqrt{1 + 64\left(\frac{x_0}{\delta}\right)^4} + \sqrt{2\left(\sqrt{1 + 64\left(\frac{x_0}{\delta}\right)^4} + 1\right)}}{2N\frac{x_0}{\delta}\sqrt{2}(2\sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{1 + 64\left(\frac{x_0}{\delta}\right)^4} + 1})} + N^{1-\sqrt{\frac{1+64\left(\frac{x_0}{\delta}\right)^4+1}{2}}} \quad (11)$$

Как уже говорилось выше при достаточно большом значении коэффициента  $N$  вычисляемые интегралы расходятся, что приводит к неправильной оценке коэффициента  $k_{skin}$ .

В качестве примера был взят гиротрон с частотой 0,52 ТГц с рабочей модой  $TE_{6,5}$ , а  $\sigma_0 = 6 * 10^6$  – идеальная проводимость для меди. На рисунке 3 представлена функция  $k_{skin}$  в зависимости от коэффициентов  $N$  при размере шероховатости 0.4 мкм.

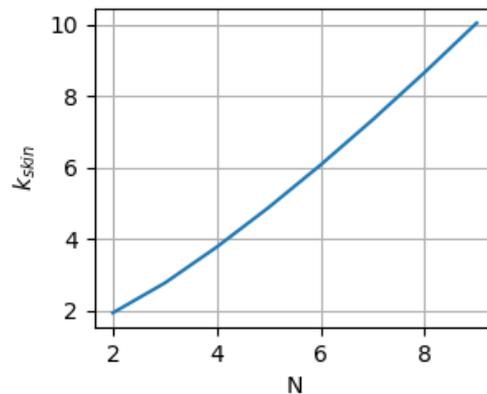
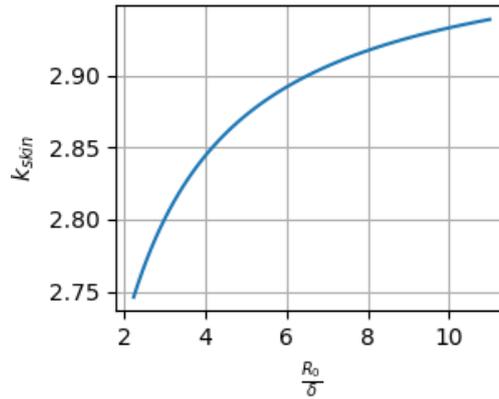


Рисунок 3. Функция  $k_{skin}(N)$

В силу того, что для гиротронов данного диапазона характерным значением  $k_{skin}$  является значение около трех, то далее значение  $N$  принималось равное трем. При котором проводимость на левом конце интегрирования почти на порядок меньше максимальной. Функция  $k_{skin}$  от отношения размера шероховатости к толщине скин-слоя при  $N = 3$  представлена на рисунке 4.



**Рисунок 4.** Функция  $k_{skin}(\frac{R_0}{\delta})$

Таким образом, приближенно формула для коэффициента  $k_{skin}$  может быть записана следующим образом (12):

$$k_{skin} = \left( 3^{-\sqrt{\frac{8(\frac{x_0}{\delta})^2 + 1}{2}}} - 3^2 \right) \frac{1 + 8\left(\frac{x_0}{\delta}\right)^2 + \sqrt{2\left(8\left(\frac{x_0}{\delta}\right)^2 + 1\right)}}{6\frac{x_0}{\delta}\sqrt{2}(2\sqrt{2} + \sqrt{8\left(\frac{x_0}{\delta}\right)^2 + 1})} + 3^{1-\sqrt{\frac{8(\frac{x_0}{\delta})^2 + 1}{2}}} \quad (12)$$

Стоит отметить, что согласно данной формуле  $k_{skin} \rightarrow \infty$  при небольших размерах шероховатости, что, как и некоторые заключения, написанные выше, является результатом расхождения интеграла для выбранного вида функции проводимости. Однако в рассматриваемом классе гиротронов размер шероховатости одного порядка или превышает глубину скин-слоя, что позволяет существенно упростить формулу (13)

$$k_{skin} \cong \frac{3\left(1 + \frac{4R_0}{\delta}\right)}{2\left(1 + \frac{2R_0}{\delta}\right)} \quad (13)$$

### 3. Заключение

Таким образом, уравнение на скин-слой было решено аналитически для заданной функции проводимости. Из решения уравнения была выведена формула для коэффициента  $k_{skin}$ , показывающего отличие реальной глубины скин-слоя от глубины в случае абсолютно гладкого резонатора.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИФФ РАН на проведение научных исследований по теме № FFUF-2022-0007.

#### Список литературы

1. Глявин М. Ю. и др. Терагерцевые гиротроны: состояние и перспективы //Радиотехника и электроника. – 2014. – Т. 59. – №. 8. – С. 745-745.
2. Венедиктов Н. П. и др. Экспериментальное исследование непрерывного высокостабильного гиротрона на второй гармонике гирочастоты для спектроскопии динамически поляризованных ядер //Изв. вузов. Радиофизика. – 2010. – Т. 53. – №. 4. – С. 260.
3. Svetlana M. et al. Antennas and mirrors reflectivity at 100-200 GHz //Infrared and Millimeter Waves, Conference Digest of the 2004 Joint 29th International Conference on 2004 and 12th International Conference on Terahertz Electronics, 2004. – IEEE, 2004. – С. 703-704.
4. Huang Y. et al. Assessing Surface Roughness Effect in Gyrotrons With the Gradient Conductivity Model //IEEE Transactions on Electron Devices. – 2022.
5. Gold G., Helmreich K. A physical model for skin effect in rough surfaces //2012 42nd European Microwave Conference. – IEEE, 2012. – С. 1011-1014.
6. Зеликин М. И. Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении //М.: Факториал. – 1998. – Т. 351.