УДК

Численное решение обобщённого уравнения синус-Гордона в представлении Грюнвальда-Летникова-Рисса

А.А. Белокур, В.В. Перепеловский

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

Аннотация: Рассмотрено нелокальное обобщение уравнения синус-Гордона в пространственной и временной областях. Нелокальность реализована производными дробного порядка Грюнвальда–Летникова–Рисса и Грюнвальда–Летникова соответственно. Численный анализ нелокального уравнения синус-Гордона показал зависимость скорости солитона как от порядка пространственной производной, так и от порядка производной по времени.

Ключевые слова: производная Грюнвальда–Летникова; производная дробного порядка; нелокальное уравнение Синус-Гордона; производная Грюнвальда–Летникова–Рисса.

1. Введение

Уравнение синуса-Гордона возникает в различных областях физики, таких как нелинейная оптика, теория джозефсоновских переходов, теория поля и теория решеток [1]. УСГ является одним из основных уравнений современной нелинейной волновой теории [2]. В данных разделах физики уравнение синус-Гордона обеспечивает простейшее нелинейное описание физических явлений в различных конфигурациях. Теория, методы решения и применение пространственного дробного дифференцирования синус-Гордона подробно обсуждаются в двух книгах [3, 4]. Изучение нелинейных сигналов является актуальной задачей [5].

Интегро-дифференциальные операторы дробного порядка (ДП) нашли применения во многих областях [6-10]. Одним из простых стимулов к использованию ДП послужили степенные законы релаксации [11]. В связи с пристальным внимание к ДП, является логичным рассмотрение волновых уравнений, в частности УСГ в нелокальном обобщении, т.е. в обобщении ДП.

Одно из обобщений УСГ, учет пространственной нелокальности, было предложено в [12]:

$$u_{tt} - {}^{R}D_{x}^{\alpha} u + \omega^{2} \sin u = 0, \tag{1}$$

где ${}^{R}D_{x}^{\alpha}$ – дробная производная Рисса [12]. Для предельного случая при $\alpha = 2$ уравнение (1) сводится к классическому УСГ. При $\alpha = 1$ уравнение (1) переходит в уравнение для задач нелокальной электродинамики Джозефсона [13-18].

Нелокальные обобщения уравнения синус-Гордона так же рассматривались в работах [19, 20]. Двойная нелокальность, описываемая а рамках формализма дифференциальных операторов дробного порядка, частично рассматривается работе [21]. В работе приводится анализ классического волнового уравнения с операторами дробного дифференцирования по времени и по пространственной координате для создания модели аномальной диффузии [22-24].

В данной работе рассмотрено УСГ с пространственной и временной нелокальностью в рамках формализма дифференциальных операторов дробного порядка Грюнвальда–Летникова–Рисса (Г-Л-Р) и Грюнвальда–Летникова (Г-Л):

$$D_t^{\beta} u(x,t) - c^2 RD_x^{\alpha} u(x,t) + \omega^2 \sin(\Omega u(x,t)) = 0 \tag{2}$$

где оператор D_t^{β} оператор дробной производной по времени порядка β в представлении Грюнвальда-Летникова [25] $0 < \beta \leq 2$; RD_x^{α} – оператор дробной производной по переменной x в представлении Грюнвальда-Летникова-Рисса [25] для краевой задачи, $1 < \alpha \leq 2$; u – решение уравнения УСГ; c, ω, Ω – параметры УСГ. Производная дробного порядка по координате придает оператору дифференцирования пространственную нелокальность. В свою очередь, производная дробного порядка по времени позволяет учесть “эффект памяти”.

Представим определение дробной производной для численного решения рассматриваемой краевой задачи (2). Левые и правые производные в определении Грюнвальда-Летникова для функции *f(x)* на промежутке от 0 до N, при $1 < \alpha \leq 2$ представим следующим образом [26-27]:

$$_{left}D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Delta x^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} b_k f(x - k\Delta x), \tag{3}$$

$$_{right}D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Delta x^{\alpha}} \sum_{k=n}^{N} b_k f(x + k\Delta x), \tag{4}$$

где $n = 1, 2, \ldots, N-1$, b_k – биномиальные коэффициенты рассчитанные следующим образом [25]:

$$b_k = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma\left(\alpha-k+1\right)}, \tag{5}$$

где k – номер узла конечно-разностного представления производных, Γ – гамма-функция.

Дробная производная Грюнвальда-Летникова-Рисса определена следующим образом [24]:

$$RD_x^{\alpha} f(x) = \frac{-1}{2\cos(\alpha\pi/2)} [\,_{left}D_x^{\alpha} f(x) + {}_{right}D_x^{\alpha} f(x)], \quad \alpha > 0, \alpha \neq 1, 3, 5, \ldots. \tag{6}$$

2. Моделирование и результаты

Численное решение уравнения (2) с определениями (3-6) реализовано при:

$$c = 1, \;\; \omega = 10, \;\; \Omega = 5 \cdot 10^{-6}.$$

Значение u(x, t) на границах интервала интегрирования заданы следующим образом:

$$u(x,t)\,|_{x=0} = 0,\; u(x,t)\,|_{x=N} = 0. \qquad (7)$$

Начальный профиль и начальная скорость волны определяется следующим образом:

$$u(x,t)\,|_{t=1} = \exp(-((30/L)\cdot(x-L/2))^2), \qquad (8)$$

$$v(x,t)\,|_{t=1} = 0, \qquad (9)$$

где L –область определения УСГ $L=(N-1)\cdot\Delta x$

Разностная схема для расчёта УСГ выглядит следующим образом:

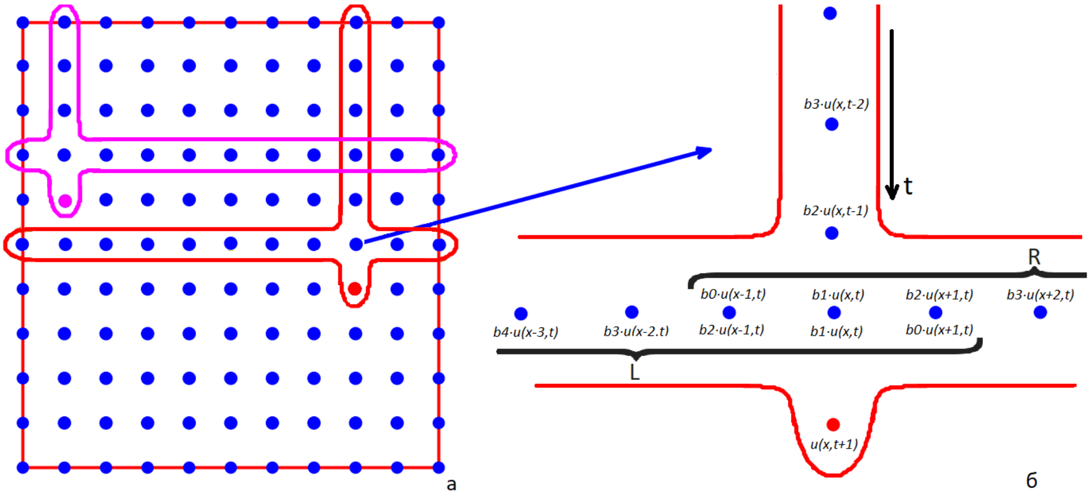

Рисунок 1. Разностная схема УСГ (а). Фрагмент разностной схемы (б): R – пространственная правосторонняя производная Г-Л, L – пространственная левосторонняя производная Г-Л, производная Г-Л по времени представлена вдоль оси t. b0, b1… – биномиальные коэффициенты, u(x, t) – решение УСГ .

Численный анализ уравнения (2) показал:

1. Уменьшение порядка пространственной дробной производной Г-Л-Р от 2-х до 1.05, при постоянной целочисленной производной по времени равной 2, приводит к возрастанию скорости соответствующей солитонному решению уравнения (2) с граничными и начальными условиями (7-9) рис. 2:

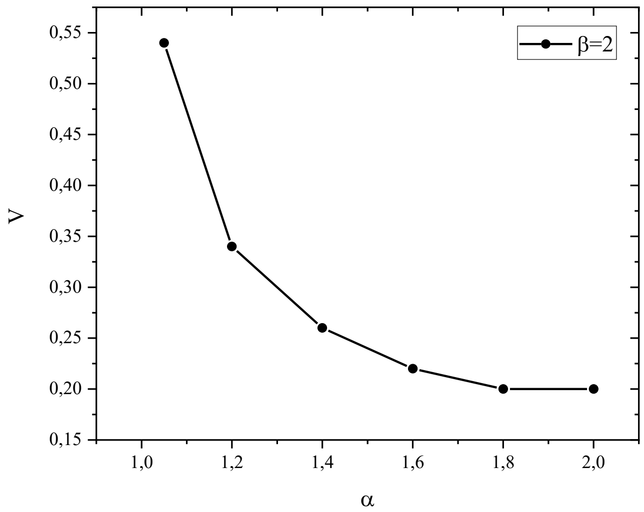

Рисунок 2. Зависимость скорости солитона от величины пространственной производной α, при постоянной производной по времени β = 2

2. Для $1.9 < \beta \leq 2$, наблюдается уменьшение скорости солитона при $1 < \alpha \leq 2$ (Рис 3,4):

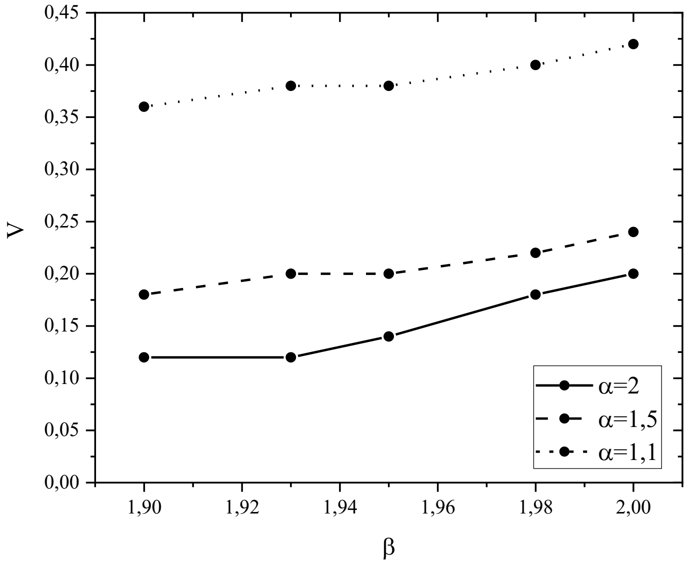

Рисунок 3. Зависимость скорости распространения солитона от изменении степени пространственной производной и производной по времени полученная на основании (2).

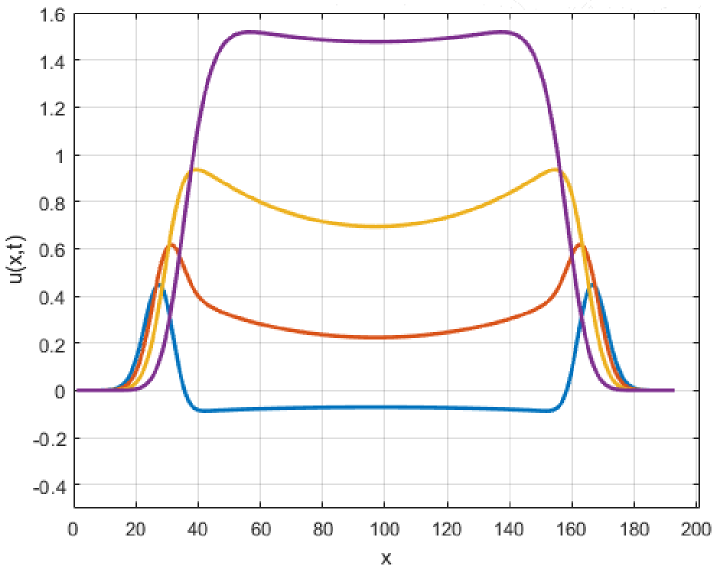

Рисунок 4. Решение уравнения (2) при степени производной по координате α=2 в зависимости от степени производной по времени: синий – β=2, красный – β=1.98, жёлтый – β=1.95, фиолетовый – β=1.9

3. Заключение

В данной статье рассмотрены солитонные решения, нелокального в пространстве и времени, уравнения синус-Гордона. Численное моделирование уравнения синус-Гордона показало влияние двойной нелокальности на решения, а именно зависимость скорости распространения солитона и его формы от степени нелокальности в пространстве и времени.

Список литературы

1. Dodd R. K. et al. Solitons and nonlinear wave equations. – 1982.
2. Wazwaz A. M., Wazwaz A. M. Solitary waves theory //Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. – 2009. – С. 479-502.
3. Debnath L., Debnath L. Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers. – Boston : Birkhäuser, 2005. – С. 528-529.
4. Newell A. C, Nonlinear Optics Addition-Wesley, New York – 1992.
5. Kondrashov A. V., Ustinov A. B. Self-generation of Möbius solitons and chaotic waveforms in magnonic-optoelectronic oscillators under simultaneous action of optic and magnonic nonlinearities //Journal of Applied Physics. – 2022. – Т. 132. – №. 17. – С. 173907.
6. Олемской А. И., Флат А. Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды //Успехи физических наук. – 1993. – Т. 163. – №. 12. – С. 1-50.
7. Гук И. П. Формализм Лагранжа для частиц, движущихся в пространстве фрактальной размерности //Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68. – №. 4. – С. 7-11.
8. Мейланов Р. П., Янполов М. С. Особенности фазовой траектории фрактального осциллятора //Письма в ЖТФ. – 2002. – Т. 28. – №. 1. – С. 67-73.
9. Олемской А. И., Флат А. Я. Дробно-дифференциальное уравнение движения фрактальной среды. – 1994.
10. Сибатов Р. Т., Учайкин В. В. Дробно-дифференциальная модель диффузии водорода в неупорядоченных полупроводниках и диэлектриках //Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2007. – Т. 14. – №. 4. – С. 749-751.
11. Учайкин В. В. Дробно-дифференциальная модель динамической памяти //Математика и механика. – 2001. – С. 14.
12. Alfimov G., Pierantozzi T. and Vázquez L. Fractional Differentiation and Its Applications, FDA 2004, Workshop Preprints/ Proceedings, 2004-1, C. 153–162.
13. Ivanchenko Y. M., Soboleva T. K. Nonlocal interaction in Josephson junctions //Physics Letters A. – 1990. – Т. 147. – №. 1. – С. 65-69.
14. Gurevich A. Nonlocal Josephson electrodynamics and pinning in superconductors //Physical Review B. – 1992. – Т. 46. – №. 5. – С. 3187.
15. Barone A., Paterno G. Physics and applications of the Josephson effect. – New York : Wiley, 1982. – Т. 1.

16. Aliev Y. M., Silin V. P. Travelling 4π-kink in nonlocal Josephson electrodynamics //Physics Letters A. – 1993. – Т. 177. – №. 3. – С. 259-262.
17. Aliev Y. M. et al. Nonlocal Josephson electrodynamics of layered structures //Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1995. – Т. 80. – №. 3. – С. 551-559.
18. Alfimov G. L., Silin V. P. On small perturbations of stationary states in a nonlinear nonlocal model of a Josephson junction //Physics Letters A. – 1995. – Т. 198. – №. 2. – С. 105-112.
19. Cunha M. D., Konotop V. V., Vázquez L. Small-amplitude solitons in a nonlocal sine-Gordon model //Physics Letters A. – 1996. – Т. 221. – №. 5. – С. 317-322.
20. Vazquez L., Evans W. A. B., Rickayzen G. Numerical investigation of a non-local sine-Gordon model //Physics Letters A. – 1994. – Т. 189. – №. 6. – С. 454-459.
21. Мороз Л. И., Масловская А. Г. Дробно-дифференциальная модель процесса теплопроводности сегнетоэлектрических материалов в условиях интенсивного нагрева //Математика и математическое моделирование. – 2019. – №. 2. – С. 29-47.
22. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка //Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26. – №. 4. – С. 660-670.
23. Ревизников Д.Л., Сластушенский Ю.В. Численное моделирование аномальной диффузии бильярдного газа в полигональном канале // Математическое моделирование. 2013. № 5. С. 3–14. Математика и математическое моделирование, 2019, №2 42
24. Овсиенко А. С. Идентификация параметров процесса аномальной диффузии на основе разностных уравнений //Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18. – №. 1. – С. 65-73.
25. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/СГ Самко, АА Килбас, ОИ Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987.
26. Мороз Л. И. Дробно-дифференциальный подход к численному моделированию динамических откликов сегнетоэлектриков как фрактальных физических систем : дис. – Любовь Игоревна Мороз, 2021.
27. Гордиенко М. А., Ралдугина Э. А., Перепеловский В. В. Волновые процессы в нелокально-связанных ансамблях нелинейных осцилляторов дробного порядка //Электроника и микроэлектроника СВЧ. – 2021. – Т. 1. – С. 572-576.