

# Энтропийный анализ диссипативных структур в ансамбле радиально-связанных осцилляторов Лоренца

А.А. Буцьк, В.В. Перепеловский

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

**Аннотация:** Рассмотрена самоорганизация системы осцилляторов Лоренца. Исследована топология ограниченных диссипативных структур с регулярной динамикой, существующих в системе радиально-связанных осцилляторов Лоренца целого порядка. Использован метод исследования основанный на анализе спектральной энтропии, рассчитываемой на основе wavelet-спектров, и метод локальных показателей Ляпунова.

**Ключевые слова:** нелокальная связь, детерминированный хаос, уравнения Лоренца, самоорганизация, синхронизация, перемежаемость, ансамбль нелинейных осцилляторов, wavelet-анализ, wavelet-преобразование, показатели Ляпунова.

## 1. Введение

Динамический хаос, развитие теории которого имело междисциплинарный характер, обеспечивший возможность прикладного применения данного явления в различных областях науки, является широко распространенным явлением в природе и одним из перспективных направлений исследований. Так, например, в последние годы исследуются возможности прикладного применения динамического хаоса, для генерации псевдослучайных последовательностей чисел [1, 2], которые могут быть использованы в таких областях как шифрование [3]. Также в процессе исследований обнаруживается способность к “обучению” осцилляторов с хаотической динамикой при взаимодействии друг с другом [4]. Приведенные выше примеры исследований демонстрируют постоянно возрастающую потребность в изучении свойств систем осцилляторов, обладающих хаотической динамикой. Одним из важных явлений, наблюдающимся при взаимодействии элементов системы, обладающих хаотической динамикой, является самоорганизация, являющаяся эмерджентным свойством таких систем и подразумевающая спонтанное образование и развитие сложных упорядоченных структур [5], порождаемое флуктуациями в условиях неустойчивости [5, 6]. Примерами самоорганизации в различных системах, обладающих хаотической динамикой, могут служить реакция Белоусова-Жаботинского (математическая модель реакции – “брюсселятор”) [5], образование ячеек Бенара в результате упорядочивания конвекционных потоков вязкой жидкости в среде с вертикальным температурным градиентом [6, 7].

В данной работе исследуется поведение системы радиально-связанных осцилляторов Лоренца целого порядка в режиме хаотической динамики [9]. В данной системе наблюдается перемежаемость [10, 11], предшествующая полной хаотической синхронизации осцилляторов системы. Перемежаемость в системе осцилляторов с хаотической динамикой, наблюдаемая на границах различных типов синхронизации, может проявляться как в виде чередования фаз с различной хаотической динамикой, так и в виде чередования фаз с хаотической и регулярной динамикой [10]. Последний тип перемежаемости, наблюдающийся в исследуемой системе, представляет интерес в контексте самоорганизации хаотических систем, под которой в данной работе понимается процесс спонтанного образования и эволюции сложных упорядоченных

структур, при образовании которых происходит уменьшение энтропии до некоторого минимума (с точностью до масштаба флуктуаций), сопровождающееся переходом системы из режима хаотической динамики в режим регулярной динамики [9].

## 2. Исследуемая система

Исследуемая система представлена множеством радиально-связанных осцилляторов Лоренца целого порядка. Осцилляторы системы подразделяются на центральный осциллятор, связанный со всеми другими осцилляторами системы двусторонними изотропными связями и периферийные осцилляторы, каждый из которых связан только с центральным осциллятором, в результате чего в системе реализуется нелокальная связь между периферийными осцилляторами посредством центрального осциллятора [9]. Таким образом, колебания  $j$ -го ( $j = 2 \dots J$ ) периферийного осциллятора в исследуемой системе описываются системой уравнений (1), а колебания центрального осциллятора ( $j = 1$ ) описываются системой уравнений (2):

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \sigma(y_j - x_j) + \varepsilon(x_1 - x_j) \\ \frac{dy_j}{dt} = x_j(\rho - z_j) - y_j + \varepsilon(y_1 - y_j), \\ \frac{dz_j}{dt} = x_j y_j - \beta z_j + \varepsilon(z_1 - z_j) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sigma(y_j - x_j) + \sum_{j=2}^J \varepsilon(x_j - x_1) \\ \frac{dy_1}{dt} = x_j(\rho - z_j) - y_j + \sum_{j=2}^J \varepsilon(y_j - y_1), \\ \frac{dz_1}{dt} = x_j y_j - \beta z_j + \sum_{j=2}^J \varepsilon(z_j - z_1) \end{cases} \quad (2)$$

где  $x_j = x_j(t)$ ,  $y_j = y_j(t)$ ,  $z_j = z_j(t)$  – координаты состояния  $j$ -го периферийного осциллятора в момент времени  $t$ ;  $x_1 = x_1(t)$ ,  $y_1 = y_1(t)$ ,  $z_1 = z_1(t)$  – координаты состояния центрального осциллятора в момент времени  $t$ ;  $J$  – количество осцилляторов в системе;  $\sigma$ ,  $\beta$ ,  $\rho$  – стандартные параметры системы нелинейных ДУ Лоренца [8];  $\varepsilon$  – параметр связи между осцилляторами.

## 3. Метод исследования

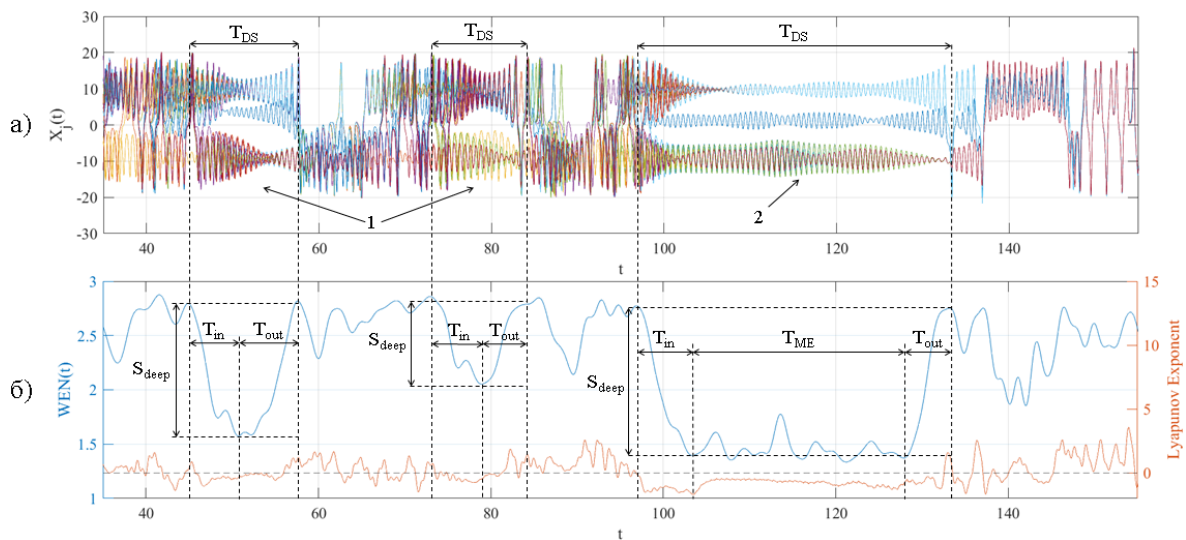
Для обнаружения и диагностики ограниченных диссипативных структур с регулярной динамикой (ДСР) [9] в данной работе используется метод локальных показателей Ляпунова [12] и метод спектральной энтропии [9]. Расчет спектральной энтропии в данной работе производится на основе wavelet-спектров временных рядов, порождаемых исследуемой системой. Целесообразность расчета спектров посредством wavelet-преобразования обусловлена использованием данным преобразованием переменных временных масштабов при расчете, что обеспечивает лучшую по сравнению с оконным Фурье-преобразованием локализацию переходных процессов и лучшую устойчивость к шумам и флуктуациям [13]. Расчет энтропии производится согласно модифицированной формуле спектральной энтропии (3) [9]:

$$WEN = \sum_m p_m \ln \left( \frac{1}{p_m} \right), \quad (3)$$

где  $p_m$  – относительная мощность  $m$ -ой гармонической составляющей wavelet-спектра сигнала с частотой  $f_m$  в фиксированный момент времени, которая в этой формуле выступает аналогом вероятности некоторого состояния, существующего в системе [9].

#### 4. Топология ограниченных диссипативных структур с регулярной динамикой. Результаты статистического анализа

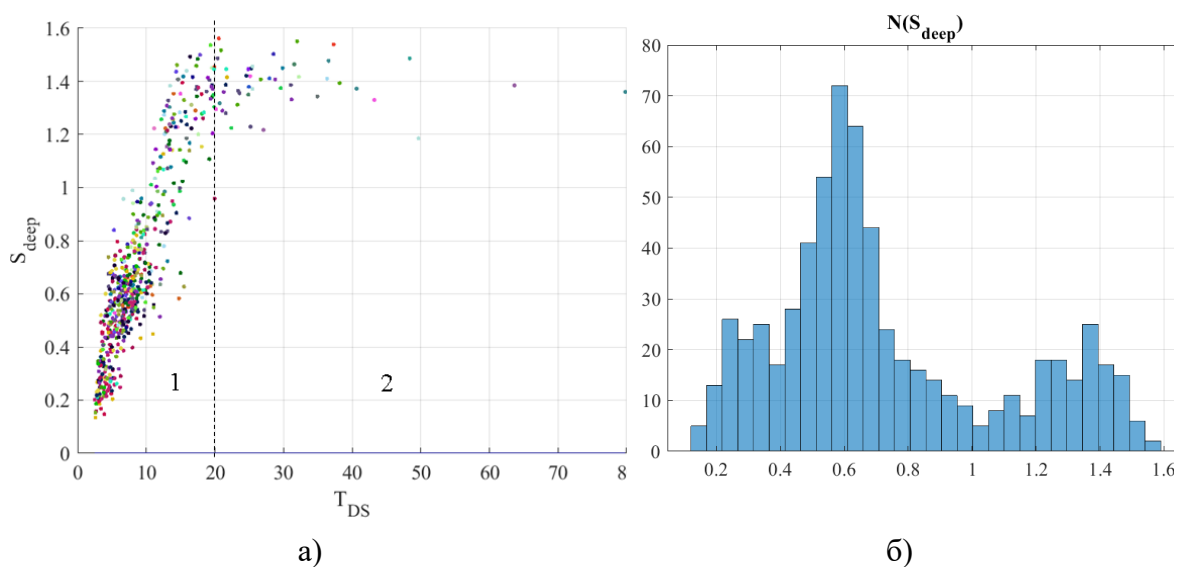
В результате энтропийного анализа временных рядов, порождаемых исследуемой системой, было выяснено, что ДСР в данной системе обладают структурой, характеризующейся наличием зон в области существования ДСР (зоны переходного процесса ( $T_{in}$ ,  $T_{out}$ ) и зона минимальной энтропии ( $T_{ME}$ )), различающихся динамикой энтропии (см рис.1(б)): зоны переходного процесса, наблюдающиеся на границах ДСР, характеризуются изменением энтропии, приводящим к смене типа динамики системы, причем в случае зоны переходного процесса, наблюдающейся на границе начала ДСР ( $T_{in}$ ), происходит понижение энтропии, приводящее к переходу системы из режима хаотической динамики в режим регулярной динамики, в случае зоны переходного процесса, наблюдающейся на границе окончания ДСР ( $T_{out}$ ), происходит повышение энтропии, приводящее к переходу системы из режима регулярной динамики в режим хаотической динамики; зона минимальной энтропии ( $T_{ME}$ ) характеризуется пребыванием системы в режиме регулярной динамики и постоянной (с точностью до масштаба флуктуаций) энтропией, имеющей минимальную величину для данной системы. Переход величины локального старшего показателя Ляпунова в область нулевых и отрицательных значений в зоне минимума энтропии наблюдаемых ДСР свидетельствует об устойчивости ДСР к малым возмущения, то есть о регулярной динамике ДСР (см рис.1(б)).



**Рисунок 1.** Образование ДСР различных типов в системе радиально-связанных осцилляторов Лоренца целого порядка: (а) –  $x_j(t)$ ,  $j = 1 \dots J$ , где  $J$  – количество осцилляторов в системе: 1, 2 – ДСР типа 1 и 2 соответственно; (б) – wavelet-энтропия (3) - синяя линия и локальный старший показатель Ляпунова - красная линия:  $T_{DS}$  – длительность ДСР,  $T_{in}$ ,  $T_{out}$  – длительности областей переходного процесса,  $T_{ME}$  – длительность области минимальной энтропии ДСР.

Статистический анализ данных, полученных посредством численного

моделирования временной эволюции исследуемой системы в режиме хаотической динамики при различных параметрах  $\rho$  и  $\varepsilon$ , показал, что ДСР в исследуемой системе подразделяются на два типа: ДСР типа 1 характеризуются отсутствием зоны минимальной энтропии, тогда как ДСР типа 2 обладают протяженной областью минимальной энтропии, причем длительность зон переходного процесса ДСР типа 2 близка к максимальной для данной системы и постоянна. Также в результате исследования зависимости глубины падения энтропии ( $S_{\text{deep}}$  – определяется согласно рис.1(б)) от длительности ДСР было обнаружено, что глубина падения энтропии ДСР типа 1 линейно возрастает с ростом длительности, что свидетельствует о примерно постоянной скорости изменения энтропии в областях переходного процесса, тогда как глубина падения энтропии ДСР типа 2 максимальна для данной системы и не зависит от длительности (см рис.2(а)). Данное обстоятельство объясняется тем, что рост длительности ДСР типа 2 обеспечивается ростом области минимальной энтропии, тогда как рост длительности ДСР типа 1 обеспечивается ростом зон переходного процесса, в которых происходит изменение энтропии системы.



**Рисунок 2.** Исследование глубины падения энтропии( $S_{\text{deep}}$ ) в обнаруженных ДСР: (а) – зависимость глубины падения энтропии( $S_{\text{deep}}$ ) от длительности ДСР: 1, 2 – области существования ДСР типа 1 и 2 соответственно, каждая точка на графике соответствует отдельной ДСР, различные цвета точек соответствуют ДСР с различными параметрами исследуемой системы; (б) – статистическое распределение обнаруженных ДСР по глубине падения энтропии.

Из графика распределения ДСР по глубине падения энтропии, представленного на рис.2(б), видно, что ДСР в исследуемой системе подразделяются на два типа, причем ДСР типа 1 встречается чаще ДСР типа 2.

## 5. Заключение

Произведено статистическое исследование самоорганизации в системе радиально-связанных осцилляторов Лоренца целого порядка в режиме хаотической динамики, с параметрами, обеспечивающими режим перемежающейся синхронизации. Наблюдающееся в исследуемой системе чередование фаз с регулярной и хаотической динамикой рассмотрено в контексте явления самоорганизации диссипативных структур. Энтропийный анализ временных рядов, порождаемых исследуемой системой, позволил обнаружить внутреннюю структуру ДСР и подразделить наблюдаемые ДСР на два типа:

1. ДСР с линейной зависимостью минимальной энтропии от длительности;
2. ДСР, минимальная энтропия которых не зависит от длительности.

Посредством метода локальных показателей Ляпунова подтверждена регулярность динамики системы в области минимума энтропии ДСР.

#### Список литературы

1. Валуик Г. А., Кондрашов А. В., Перепеловский В. В. Масштабирование псевдослучайных последовательностей в нечетко определенных границах //Электроника и микроэлектроника СВЧ. – 2020. – Т. 1. – №. 1. – С. 72-75.
2. Валуик Г. А., Кондрашов А. В., Перепеловский В. В. Контроль фрактальной размерности динамического хаоса //Электроника и микроэлектроника СВЧ. – 2021. – Т. 1. – С. 506-509.
3. Ünal Ç. et al. The design and implementation of hybrid RSA algorithm using a novel chaos based RNG // Chaos, Solitons & Fractals. – 2017. – Т. 104. – С. 655 – 667.
4. Chattopadhyay A., Hassanzadeh P., Subramanian D. Data-driven predictions of a multiscale Lorenz 96 chaotic system using machine-learning methods: reservoir computing, artificial neural network, and long short-term memory network //Nonlinear Processes in Geophysics. – 2020. – Т. 27. – №. 3. – С. 373-389.
5. Пригожин И., Николис Г. Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации //И. Пригожин. – 1979.
6. Пригожин И. Время, структура и флуктуации //Успехи физических наук. – 1980. – Т. 131. – №. 6. – С. 185-207.
7. Koschmieder E. L. Bénard cells and Taylor vortices. – Cambridge University Press, 1993.
8. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow //Journal of atmospheric sciences. – 1963. – Т. 20. – №. 2. – С. 130-141.
9. Буцык А. А., Гордиенко М. А., Перепеловский В. В. Исследование самоорганизации в системах радиально-связанных осцилляторов Лоренца дробного порядка //ЭЛЕКТРОНИКА. – 2022. – Т. 1. – С. 373-377.
10. Ханадеев В. А., Москаленко О. И., Короновский А. А. Механизмы возникновения перемежаемости на границе обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора //НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА. – С. 30.
11. Москаленко О. И., Короновский А. А., Ханадеев В. А. Перемежающееся поведение на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора //Журнал технической физики. – 2019. – Т. 89. – №. 3. – С. 338-341.
12. Москаленко О. И., Евстифеев Е. В., Короновский А. А. Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации на основе расчета локальных показателей Ляпунова //Письма в Журнал технической физики. – 2020. – Т. 46. – №. 16. – С. 12-15.
13. Евстифеев Е. В., Москаленко О. И. Применение непрерывного вейвлет-преобразования для определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации //НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА. – 2020. – С. 10.