УДК 621.396

Исследование самоорганизации в системах радиально-связанных осцилляторов Лоренца дробного порядка

А.А. Буцык, М.А. Гордиенко, В.В. Перепеловский

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

Аннотация: Рассмотрена самоорганизация системы осцилляторов Лоренца дробного порядка. Исследованы параметры, характеризующие самоорганизацию динамического хаоса в системе радиально-связанных осцилляторов Лоренца дробного порядка. Использован метод определения параметров самоорганизации, основанный на спектральном анализе и анализе спектральной энтропии временных рядов, порождаемых системой. Введено понятие «сечение самоорганизации».

Ключевые слова: нелокальная связь, детерминированный хаос, уравнения Лоренца, осцилляторы дробного порядка, дробная производная, самоорганизация, синхронизация, ансамбль нелинейных осцилляторов, мемристоры.

1. Введение

В последние годы внимание исследователей привлекают системы дробного порядка с хаотической динамикой, для исследования которых разрабатываются различные методы, в том числе основанные на спектральном анализе хаотических временных рядов, порождаемых системой[1]. Кроме того активно исследуются возможности прикладного использования устройств (мемристоров), реализующих различные системы дробного порядка с динамическим хаосом [2]. Одним из явлений, наблюдающимся в таких системах, к которым относятся также многие биологические системы, является самоорганизация, то есть явление спонтанного образования и развития сложных упорядоченных структур [3]. Энтропия таких систем с течением времени может проходить через минимум или оставаться постоянной, что не противоречит законам термодинамики, поскольку системы, в которых наблюдается явление самоорганизации, не являются замкнутыми и характеризуются диссипацией энергии [3].

В качестве объекта изучения систем, подверженных самоорганизации, целесообразно использовать распределенные среды, реализованные дискретными элементами, локально и нелокально взаимодействующими друг с другом. В качестве такой распределенной среды, в данной работе используется множество нелокально-связанных осцилляторов Лоренца дробного порядка в режиме динамического хаоса. Осциллятор Лоренца в режиме динамического хаоса является незамкнутой системой, что является предпосылкой эффекта самоорганизации, а наличие производной дробного порядка в уравнениях Лоренца, обеспечивает возможность исследования влияния памяти системы на процесс самоорганизации.

2. Исследуемая система и её характеристики

В качестве системы с хаотической динамикой в данной работе выбрана система радиально-связанных осцилляторов Лоренца дробного порядка [4], обладающих эффектом памяти и полученных путем замены производных целого порядка в системе нелинейных дифференциальных уравнений Лоренца [5] на операторы дробного дифференцирования [4]. Для задания и численного расчета дробной производной в данной работе используется дифферинтеграл Грюнвальда-Летникова [4]. Осцилляторы в исследуемой системе подразделяются на центральный осциллятор, связанный со всеми другими осцилляторами системы двусторонними изотропными связями и периферийные осцилляторы, каждый из которых связан только с центральным осциллятором двусторонней изотропной связью, в результате чего в системе реализуется нелокальная связь между периферийными осцилляторами посредством центрального осциллятора (рис.1).

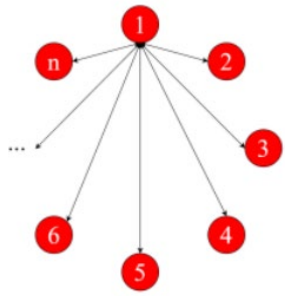

Рисунок 1. Топология системы радиально связанных осцилляторов Лоренца[4]: осциллятор с номером 1 – центральный, остальные(2…n) - периферийные.

В данной работе используется алгоритм численного расчета дробной производной [4], позволяющий управлять эффектом памяти в системе посредством изменения ширины «окна памяти» [4]. При этом наименьшая результирующая погрешность расчета явным методом Эйлера обеспечивается посредством записи дробной производной в правой части системы уравнений Лоренца дробного порядка [4]. Таким образом, колебания *j*-го (*j* = 2…J) периферийного осциллятора в исследуемой системе описываются системой уравнений (1), а колебания центрального осциллятора(*j* = 1) описываются системой уравнений (2):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = \dfrac{d^{1-q}}{dt^{1-q}}\left[\sigma\left(y_j - x_j\right) + \varepsilon\left(x_1 - x_j\right)\right] \\ \dfrac{dy_j}{dt} = \dfrac{d^{1-q}}{dt^{1-q}}\left[x_j\left(\rho - z_j\right) - y_j + \varepsilon\left(y_1 - y_j\right)\right], \\ \dfrac{dz_j}{dt} = \dfrac{d^{1-q}}{dt^{1-q}}\left[x_j y_j - \beta z_j + \varepsilon\left(z_1 - z_j\right)\right] \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{d^{1-q}}{dt^{1-q}}\left[\sigma\left(y_j - x_j\right) + \sum_j \varepsilon\left(x_j - x_1\right)\right] \\ \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{d^{1-q}}{dt^{1-q}}\left[x_j\left(\rho - z_j\right) - y_j + \sum_j \varepsilon\left(y_j - y_1\right)\right], \\ \dfrac{dz_1}{dt} = \dfrac{d^{1-q}}{dt^{1-q}}\left[x_j y_j - \beta z_j + \sum_j \varepsilon\left(z_j - z_1\right)\right] \end{cases} \tag{2}$$

где $x_j = x_j(t)$, $y_j = y_j(t)$, $z_j = z_j(t)$ – координаты состояния j-го периферийного осциллятора в момент времени t; $x_1 = x_1(t)$, $y_1 = y_1(t)$, $z_1 = z_1(t)$ – координаты состояния центрального осциллятора в момент времени t; q – порядок дробной производной; σ, β, ρ – стандартные параметры системы нелинейных ДУ Лоренца [5]; ε – коэффициент связи между осцилляторами. Из (1) и (2) видно, что каждый осциллятор системы «помнит» помимо своих собственных состояний в предыдущие моменты времени в пределах заданного «окна памяти» [4] состояния и других осцилляторов, с которыми он связан.

3. Самоорганизация динамического хаоса

Под самоорганизацией системы с динамическим хаосом в данной работе понимается процесс спонтанного образования и эволюции сложных упорядоченных структур в системе [3], при образовании которых происходит уменьшение энтропии системы до некоторого минимума, сопровождающееся переходом системы из режима хаотической динамики в режим регулярной динамики в области минимума энтропии системы. Таким образом, в процессе самоорганизации в системе с хаотической динамикой происходит образование диссипативных структур [3] с регулярной динамикой.

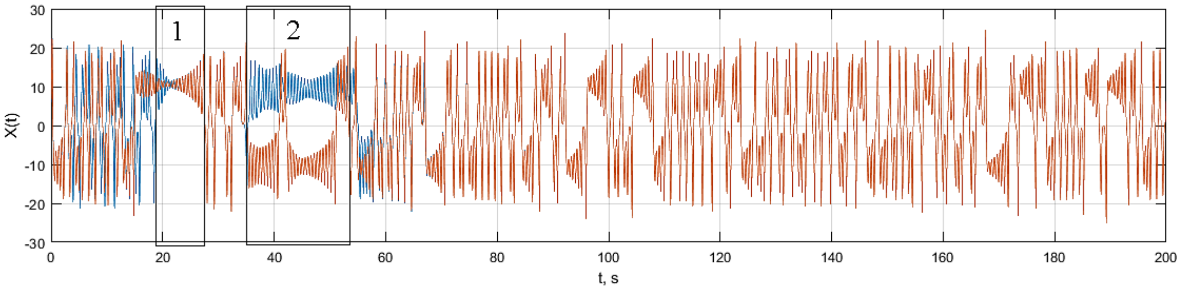

Рисунок 2. Образование ограниченных диссипативных структур в системе радиально-связанных осцилляторов Лоренца дробного порядка: 1, 2 – ограниченные диссипативные структуры (участки самоорганизации системы).

В процессе исследования нами были обнаружены различные диссипативные структуры и сформирована следующая типизация этих структур: ограниченные диссипативные структуры (рис.2-3), в области существования которых энтропия системы остается минимальной в течение ограниченного интервала времени, после которого система возвращается в режим хаотической динамики, и неограниченные диссипативные структуры (рис.4), в области существования которых энтропия системы остается минимальной в течение неограниченно долгого времени, при этом система находится в режиме регулярной динамики. В данной работе подробно изучены ограниченные диссипативные структуры и определены параметры их самоорганизации. Для определения параметров самоорганизации неограниченных диссипативных структур требуется дальнейшее исследование. Под параметрами самоорганизации ограниченных диссипативных структур понимаются: длительность диссипативной структуры и сечение самоорганизации. Под сечением самоорганизации понимается наибольшее отношение между длительностью временной области уменьшения энтропии системы до локального минимума энтропии (точка максимальной самоорганизации), в котором система находится в режиме регулярной динамики, и длительностью временной области возрастания энтропии от локального минимума до возвращения системы в режим хаотической динамики (см рис.3(в)). Для определения этих параметров нами был использован метод, основанный на спектральном анализе и анализе спектральной энтропии временных рядов, порождаемых исследуемой системой. Для оценки энтропии в данной работе используется модифицированная формула спектральной энтропии(5) [1, 6]:

$$SEN = \sum_m p_m \ln\left(\frac{1}{p_m}\right), \tag{5}$$

где p_m – относительная мощность [1] m-ой гармонической составляющей сигнала с частотой f_m, которая в этой формуле выступает аналогом вероятности некоторого состояния, существующего в системе (см рис.3(б)). Для определения границ существования исследуемой диссипативной структуры:

1. Определяется спектр временного ряда в малой окрестности точки локального минимума энтропии (максимальной самоорганизации) диссипативной структуры,
2. Полученный спектр сравнивается со спектрами временного ряда в областях, претендующих на границы самоорганизации,
3. Сравнение выполняется согласно формуле (6) -среднеквадратичное отклонение усредненных спектров системы от спектра области максимальной самоорганизации диссипативной структуры (см рис.3(в)),
4. В качестве границ выбираются области, в которых изменение среднеквадратичного отклонения спектра (6) не является флуктуацией.

$$\Delta\left|\dot{X}^k\right| = \left[\frac{1}{\left|\{m\}\right|}\sum_m\left(\sqrt{\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left|\dot{X}^k_{j,m}\right|^2} - \sqrt{\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left|\dot{X}^0_{j,m}\right|^2}\right)^2\right]^{1/2}, \qquad (6)$$

где $\left|\dot{X}^k_{j,m}\right|$ - амплитуда m-ой гармоники j-го осциллятора k-го члена временного ряда;

а $\left|\dot{X}^0_{j,m}\right|$ - амплитуда m-ой гармоники j-го осциллятора в момент максимальной самоорганизации системы. Затем производится расчет параметров самоорганизации исследуемой ограниченной диссипативной структуры (рис.3).

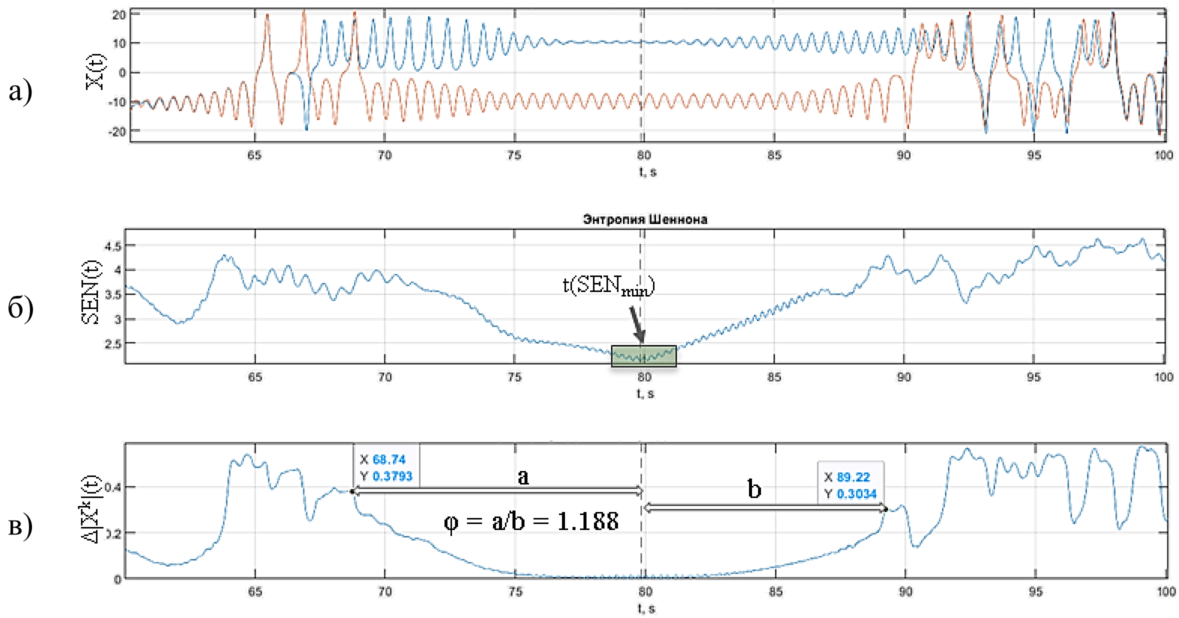

Рисунок 3. Определение границ смены типа решений и сечения самоорганизации(φ): (а) – X(t) двух осцилляторов системы; (б) – зависимость энтропии системы от времени: t(SEN_{min}) – минимальная энтропия диссипативной структуры; (в) – среднеквадратичное отклонение усредненных спектров системы от спектра области максимальной самоорганизации диссипативной структуры: φ = a/b – сечение самоорганизации, a – длительность участка уменьшения энтропии диссипативной структуры (переход к состоянию максимальной самоорганизации диссипативной структуры), b – длительность участка увеличения энтропии диссипативной структуры (выход из состояния максимальной самоорганизации диссипативной структуры), a+b – длительность диссипативной структуры.

На рис.4 представлена неограниченная диссипативная структура, области минимальной энтропии которой соответствует фазовая синхронизация между осцилляторами.

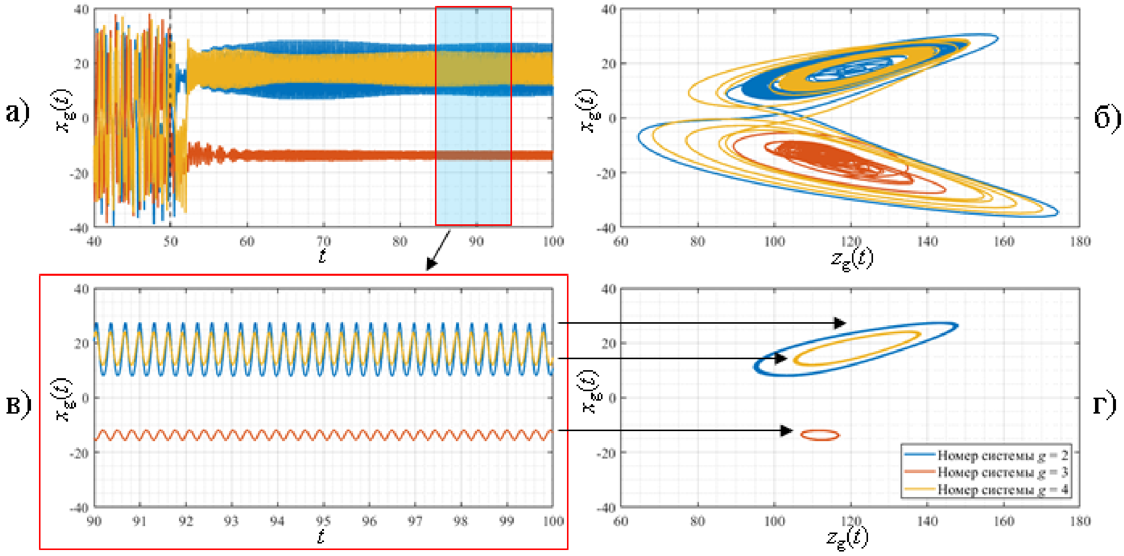

Рисунок 4. Образование неограниченных диссипативных структур в системе радиально-связанных осцилляторов Лоренца дробного порядка: (а), (в) – временная реализация решений; (б), (г) – траектории решений в фазовой плоскости XZ.

5. Заключение

Исследованы системы радиально-связанных осцилляторов Лоренца дробного порядка в режиме хаотической динамики и обнаружено явление самоорганизации в этих системах, под которой в данной работе понимается процесс образования и эволюции диссипативных структур с регулярной динамикой, в областях существования которых энтропия системы достигает локальных минимумов. Обнаруженные диссипативные структуры были подразделены на два типа – ограниченные и неограниченные диссипативные структуры. Были исследованы ограниченные диссипативные структуры, определены параметры, характеризующие их самоорганизацию (длительность диссипативной структуры и сечение самоорганизации) с использованием метода измерения этих параметров, основанного на спектральном анализе и анализе энтропии временных рядов системы.

Список литературы

1. Xiong P. Y. et al. Spectral entropy analysis and synchronization of a multi-stable fractional-order chaotic system using a novel neural network-based chattering-free sliding mode technique //Chaos, Solitons & Fractals. – 2021. – Т. 144. – С. 110576.
2. Akgül A. et al. A simple fractional-order chaotic system based on memristor and memcapacitor and its synchronization application //Chaos, Solitons & Fractals. – 2021. – Т. 152. – С. 111306.
3. Пригожин И., Николис Г. Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации //И. Пригожин. – 1979.
4. Гордиенко М. А., Ралдугина Э. А., Перепеловский В. В. Волновые процессы в нелокально-связанных ансамблях нелинейных осцилляторов дробного порядка //Электроника и микроэлектроника СВЧ. – 2021. – Т. 1. – С. 572-576.
5. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow //Journal of atmospheric sciences. – 1963. – Т. 20. – №. 2. – С. 130-141.
6. Acharya U. R. et al. Application of entropies for automated diagnosis of epilepsy using EEG signals: A review //Knowledge-based systems. – 2015. – Т. 88. – С. 85-96