

Рассеяние гауссова пучка на плоскопараллельной пластине диэлектрика с произвольной комплексной диэлектрической проницаемостью

М.Л. Кулыгин, И. А. Литовский, Е. Д. Господчиков

Институт прикладной физики РАН

Аннотация: исследуется задача наклонного падения гауссова пучка с произвольными апертурой и поляризацией на расположенную в вакууме плоскопараллельную пластину бесконечно широкого диэлектрика с произвольной комплексной диэлектрической проницаемостью, учитывая джоулевы потери. Продемонстрирована возможность получения точного решения в квадратурах. Обсуждаются возможности быстрого численного разрешения квадратур без существенных потерь точности. Результаты демонстрируются в виде поправок к традиционно используемым коэффициентам отражения, прохождения и джоулевых потерь для плоской волны.

Ключевые слова: гауссов пучок, диэлектрик, полупроводник, прохождение, отражение, джоулевы потери, диэлектрическая проницаемость

1. Введение

Актуальность задач о распространении электромагнитных волн в различных материальных средах в виде гауссовых пучков обусловлена удобством и эффективностью их транспортировки, а также относительной простотой и доступностью систем преобразования и линий передач. Известно немало решений задач рассеяния гауссовых пучков на границах существенно различных между собой материальных диэлектрических сред, например, [1, 2, 3]. Имея в качестве практических приложений пассивные волноведущие структуры, большинство задач ограничиваются рассмотрением диэлектриков с пренебрежимо низкими потерями, в теории равными нулю. В настоящей работе рассматриваются диэлектрики с принципиально ненулевыми потерями – например, полупроводники, используемые в качестве активных элементов переключателей электромагнитного излучения [4-7]. Рассеяние интенсивного гауссова пучка в таких материалах вызывает джоулев нагрев, при этом температурная зависимость потерь способна привести к лавинообразному эффекту и физическому разрушению. Из-за отсутствия полного внутреннего отражения, эффектами незеркального отражения гауссова пучка – сдвигами Гуса-Хенхен, Фёдорова и т.п. на границах диэлектрика можно пренебречь.

Целью настоящего исследования является разработка аналитического метода учета разницы энергетических коэффициентов – прохождения, отражения и джоулевых потерь между гауссовым пучком и соответствующей ему плоской волной.

2. Энергетические коэффициенты для двух поляризаций плоской волны

Плоская волна с электрическим полем, перпендикулярным плоскости падения, определяется как s-поляризованная, рис. 1а:

$$E_i(x, z) = e^{jk(z \cos \varphi + x \sin \varphi)}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (1)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, c – скорость света в среде вне диэлектрика, которая по умолчанию - вакуум.

Будем искать отраженную и прошедшую волны в виде:

$$E_{r_1}(x, z) = R_{r_1} e^{jk(-z \cos \varphi + x \sin \varphi)}, E_{in_1}(x, z) = T_{in_1} e^{-\gamma z} e^{jk_0(z \cos \psi + x \sin \psi)}. \quad (2)$$

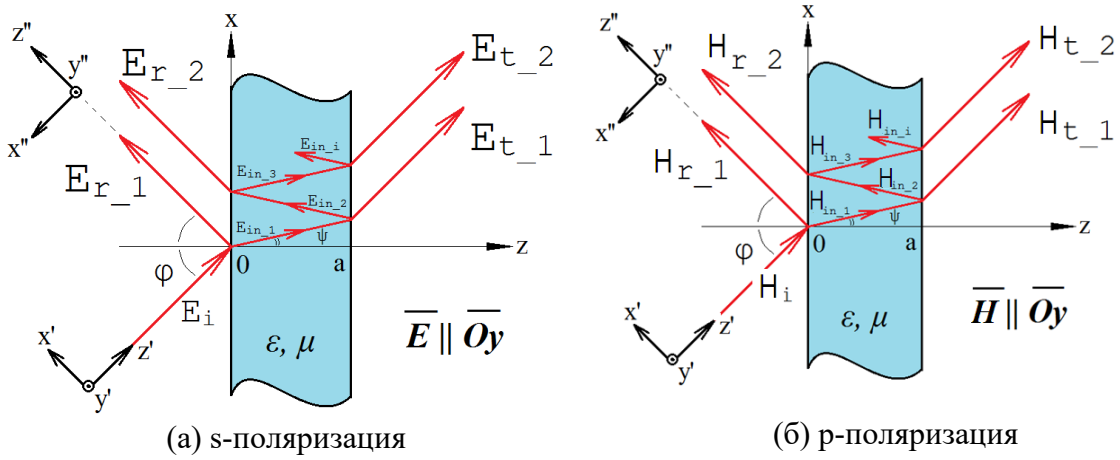


Рисунок 1. Схема падения ЭМВ двух поляризаций на плоскопараллельную пластинку.

Представление (2) удобно тем, что все введенные константы – вещественные. Для поиска коэффициентов Френеля воспользуемся граничными условиями:

$$E_\tau|_{z=z_0-0} = E_\tau|_{z=z_0+0}, H_\tau|_{z=z_0-0} = H_\tau|_{z=z_0+0} \quad (3)$$

Ввиду геометрии задачи (рис.1): $E_\tau = E_y$, $H_\tau = H_x$. Из уравнений Максвелла для гармонической волны $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H} \sim e^{j\omega t}$ имеем:

$$\vec{H} = -\frac{c}{j\omega\mu} \text{rot} \vec{E}, H_x = \frac{c}{j\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (4)$$

Граничные условия (3) с учетом уравнений (4) преобразуются в виде двух уравнений:

$$E_i(x, 0) + E_{r_1}(x, 0) = E_{in_1}(x, 0), \frac{\partial E_i(x, 0)}{\partial z} + \frac{\partial E_{r_1}(x, 0)}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_{in_1}(x, 0)}{\partial z} \quad (5)$$

Подставляя поля (1), (2) в (5) получаем коэффициенты Френеля для однократного отражения и прохождения:

$$R = R_{r_1} = \frac{\mu j k \cos \varphi - (j k_0 \cos \psi - \gamma)}{\mu j k \cos \varphi + (j k_0 \cos \psi - \gamma)}, T = T_{in_1} = \frac{2 \mu j k \cos \varphi}{\mu j k \cos \varphi + (j k_0 \cos \psi - \gamma)}, k_0 = k \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \quad (6)$$

Аналогичная процедура для второго отражения-прохождения приводит к:

$$R_{in_2} = -R, T_{t_1} = 2 - T. \quad (7)$$

При дальнейших падениях волны, распространяющейся в диэлектрическом волноводе, на границы раздела сред, коэффициенты Френеля при отражении и прохождении будут совпадать с коэффициентами в выражении (7). Отношения комплексных амплитуд электрического поля в «соседних» плоских волнах:

$$\frac{E_{r_2}}{E_{r_1}} = T(T - 2) e^{-2\gamma a} e^{2j k_0 a \cos \psi} \quad (8)$$

Для всех последующих отраженных и прошедших волн:

$$q = \frac{E_{t_{i+1}}}{E_{t_i}} = \frac{E_{r_{i+2}}}{E_{r_{i+1}}} = R^2 e^{-2\gamma a} e^{2j k_0 a \cos \psi}, i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Используя принцип суперпозиции полей, найдем полное отраженное и полное

прошедшее поля в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$E_t = \sum_{i=1}^{\infty} E_{t_i} = E_{t_1} \sum_{i=0}^{\infty} q^i = E_{t_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^n}{1-q}, \quad E_r = E_{r_1} + E_{r_2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^n}{1-q}, \quad (10)$$

Таким образом, коэффициенты Френеля для s-поляризованной плоской волны:

$$\mathbf{R}_{s\Sigma} = R \left(1 + \frac{T(T-2)e^{-2\gamma a} e^{2jk_0 a \cos \psi}}{1-q} \right), \quad \mathbf{T}_{s\Sigma} = \frac{(2-T)T e^{-\gamma a} e^{ja(k_0 \cos \psi - k \cos \varphi)}}{1-q}. \quad (11)$$

Потери энергии в пластинке определим как:

$$W_{\gamma\Sigma} = 1 - |R_{\Sigma}|^2 - |T_{\Sigma}|^2 \quad (12)$$

Найдем выражения для преломленного угла ψ и логарифмического декремента затухания. Плоские волны внутри диэлектрика удовлетворяют волновому уравнению:

$$\Delta E_{in_i} + k_{in_i}^2 E_{in_i} = 0, \quad k_{in} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}, \quad E_{in_i} = A_{in_i} e^{\pm \gamma z} e^{jk_0(\mp z \cos \psi + x \sin \psi)}, \quad (13)$$

Решая систему (13), получим:

$$-k_{in}^2 = (jk_0 \cos \psi - \gamma)^2 + (jk_0 \sin \psi)^2 \quad (14)$$

Для процессов e^{+jkz} с ростом z вглубь диэлектрика поле затухает, поэтому проницаемость запишем в виде $\varepsilon = \varepsilon'(1 + j \operatorname{tg} \delta)$. Получаем искомое:

$$\psi = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{2} \sin \psi_0}{\operatorname{tg} \delta} \sqrt{-\cos^2 \psi_0 + \sqrt{\cos^4 \psi_0 + \operatorname{tg}^2 \delta}} \right], \quad \gamma \cos \psi = \frac{k \mu \varepsilon'' \sin \psi}{2 \sin \varphi}. \quad (15)$$

где $\operatorname{tg} \delta = \varepsilon''/\varepsilon'$, – тангенс угла диэлектрических потерь, а величина $\sin \psi_0 = \frac{\sin \varphi}{n_0}$ – определяется законом Снеллиуса для сред без поглощения, где $n_0 = \sqrt{\mu \varepsilon'}$. Второе выражение в (15) имеет смысл декремента затухания вдоль оптического пути.

Примечательно, что для получения выражений для коэффициентов отражения и прохождения для p -поляризации (поле \vec{E} в плоскости падения) из выражений для s -поляризации достаточно в последних заменить явно входящие μ на ε .

3. Коэффициенты Френеля в квадратурах для двумерного Гауссова пучка (2D).

В оптике имеют дело не с плоскими волнами, а с пучками конечной ширины, в которых интенсивность поля уменьшается в направлении периферии освещаемой апертуры. Пучок такого типа представляет собой континуальную суперпозицию плоских волн, волновые векторы которых образуют узкий конус направлений вокруг основного направления распространения. Особо важную роль в теории распространения коротковолнового излучения играют параксиальные волновые пучки с так называемой гауссовой зависимостью амплитуды поля от поперечных координат. Гауссовы пучки являются собственными типами волн в открытых центрированных линиях передачи силовых полей.

При распространении в линии передачи в промежутках между линзами (или зеркалами) фазовый фронт и ширина гауссова пучка меняются в небольших пределах. Линзы (или зеркала) корректируют эти изменения. Поэтому внутри каждой отдельной ячейки, из совокупности которых состоит линия передачи, имеется сечение, в котором поле гауссова пучка имеет плоский фазовый фронт. Эта область называется шейкой пучка, и характеризуется наименьшей полушириной пучка ρ_0 по уровню поля $1/e$ от максимума. Параксиальные волновые пучки являются решением системы уравнений Максвелла в приближении малой дифракционной расходимости пучка, когда $\rho_0 \gg \lambda$. При выполнении данного условия продольной компонентой поля можно пренебречь. И считать направление поляризации одинаковым во всех точках пространства [8].

Введем связанную с падающим пучком систему координат $X'Y'Z'$, удаленную от границы раздела сред на расстояние z'_s вдоль пучка (рис.3).

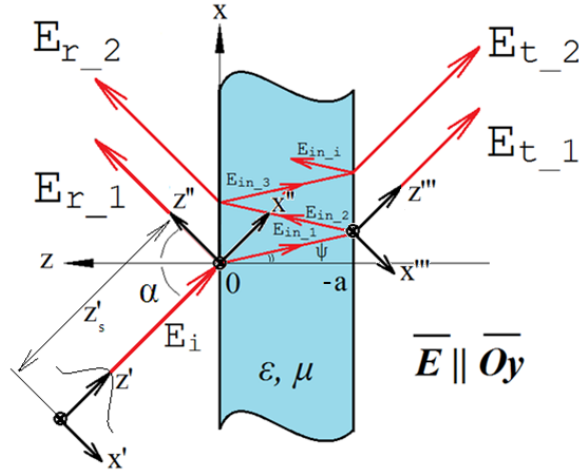


Рисунок 2. Схема падения гауссового пучка s – поляризации на границу раздела.

Распределение поля в пучке имеет вид:

$$\mathbf{E}(x', y', z') = \mathbf{E}_0 \frac{\rho_0}{\rho(z')} \exp \left[-jkz' + j\eta(z') - (x'^2 + y'^2) \left(\frac{1}{\rho^2(z')} + \frac{jk}{2R(z')} \right) \right] \quad (16)$$

где $\rho(z') = \rho_0 \sqrt{1 + z'^2/z_0^2}$ – функция, определяющая зависимость ширины пучка от координаты вдоль направления распространения, $R(z') = z'(1 + z_0^2/z'^2)$ – радиус кривизны пучка, $\eta(z') = \arctg(z'/z_0)$ – набег фазы, $z_0 = k\rho_0^2/2$ – расстояние, на котором ширина пучка увеличивается в $\sqrt{2}$ раз.

В нештрихованной системе координат, связанной с границей раздела сред:

$$x' = -x \cos \alpha - z \sin \alpha, y' = y, z' = -z \cos \alpha + x \sin \alpha + z'_s \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), получим поле на границе раздела сред ($z = 0$):

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = \mathbf{E}_0 \frac{\rho_0}{\rho(x)} \exp \left[-jk(x \sin \alpha + z'_s) + j\eta(x)(x^2 \cos^2 \alpha + y^2) \left(\frac{1}{\rho^2(x)} + \frac{jk}{2R(x)} \right) \right] \quad (18)$$

Границы применимости метода задаются соотношением:

$$\operatorname{tg}(\alpha) \leq \frac{\pi\rho_0}{10\lambda} \quad (19)$$

Тогда выражение для падающего поля на границе раздела примет вид:

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = \mathbf{E}_c(y) \exp \left[-jxk_{xg} - x^2 w_x^{-2} \right] \quad (20)$$

где $\mathbf{E}_c(y) = \mathbf{E}_0 \frac{\rho_0}{\rho_c} \exp(j\eta_c - jkz'_s - y^2 w_x^{-2} \cos^2 \alpha)$, $w_x^{-2} = \left(\frac{1}{\rho_c^2} + \frac{jk}{2R_c} \right) \cos^2 \alpha$.

Заметим, что (16) является приближенным. В то же время (20) можно считать точным, в силу произвольности задания граничных условий. Фурье-образом от (20) является следующая функция тангенциальной составляющей волнового вектора:

$$\mathbf{E}(k_x) = \mathbf{E}_c \frac{w_x}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[\frac{-w_x^2 (k_{xg} - k_x)^2}{4} \right]. \quad (21)$$

Обратное преобразование дает распределение поля в падающем пучке:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{k_l}^{k_h} \mathbf{E}(k_x) \exp[-jk_x x + jk_z z] dk_x, k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} \quad (22)$$

Распределения полей в отраженном и прошедшем пучках находится путем интегрирования по всем отраженным плоским волнам с различными углами падения:

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = \int_{k_l}^{k_h} \mathbf{R}_\Sigma(k_x) \mathbf{E}(k_x) \exp[-jk_x x - jk_z z] dk_x, \quad (22a)$$

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = \int_{k_l}^{k_h} \mathbf{T}_\Sigma(k_x) \mathbf{E}(k_x) \exp[-jk_x x + jk_z(z + a)] dk_x. \quad (22b)$$

$$k_l = k_{xg} - 2 \sqrt{\frac{N}{\operatorname{Re}(w_x^2)}} \leq k_x \leq k_{xg} + 2 \sqrt{\frac{N}{\operatorname{Re}(w_x^2)}} = k_h \quad (22c)$$

Результирующие энергетические коэффициенты для гауссова пучка удобно определить в нестрихованной системе координат на границе раздела сред:

$$R_{EG} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |E_r(x, 0, 0)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |E_i(x, 0, 0)|^2 dx} = \frac{\int_{k_l}^{k_h} |\mathbf{R}_\Sigma(k_x) \mathbf{E}(k_x)|^2 dk_x}{\int_{k_l}^{k_h} |\mathbf{E}(k_x)|^2 dk_x}, \quad (23)$$

$$T_{EG} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |E_t(x, 0, -a)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |E_i(x, 0, 0)|^2 dx} = \frac{\int_{k_l}^{k_h} |\mathbf{T}_\Sigma(k_x) \mathbf{E}(k_x)|^2 dk_x}{\int_{k_l}^{k_h} |\mathbf{E}(k_x)|^2 dk_x}. \quad (24)$$

Потери гауссова пучка после прохождения введем по аналогии с плоской волной:

$$W_{\gamma G} = 1 - R_{EG} - T_{EG} \quad (25)$$

4. Заключение.

Полученный с помощью двойного Фурье-преобразования новый метод позволяет избежать особых точек подынтегральных выражений и снимает ограничения известных методов [8]. Это позволяет расширить пределы применимости даже на сильно сфокусированные гауссовы пучки, скользящие углы и оптически плотные, существенно диссипативные материалы – например, арсенид галлия, кремний, органические полимеры.

Авторы выражают благодарность М. Ю. Глявину, Г. Г. Денисову, А. В. Кудрину и Н. Д. Миловскому за постоянное внимание к работе и стимулирующие дискуссии. Исследование выполнено за счет **гранта Российского научного фонда (проект № 19-79-30071)**.

Список литературы

1. Хозин М. А., Денисов Г. Г., Белоусов В. И. Повышение эффективности квазиоптических брэгговских рефлекторов //Изв. ВУЗов Радиофизика. – 2016. – Т. 59. – С. 743.
2. Li Q., Vernon R. J. Theoretical and Experimental Investigation of Gaussian Beam Transmission and Reflection by a Dielectric Slab at 110 GHz //IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 2006. – V. 54. – P. 3449.
3. Kozaki S., Sakurai H. Characteristics of a Gaussian beam at a dielectric interface //J. Optical Society of America. – 1978. – V. 68. – p. 508.
4. Picard J., Schaub S., Rosenzweig G., et al. Laser-driven semiconductor switch for generating nanosecond pulses from a megawatt gyrotron //Applied Physics Letters. – 2019. – V. 114. – No. 16. – P. 164102.
5. Kulygin M. L., Litovsky I. A., Belousov V. I., et al. High-Resolution Diagnostics of GaAs Wafer Inhomogeneity Using an Optical Switch within the Terahertz Band //Applied Physics Letters. – 2021. – V. 118. – No. 24. – P. 244103.
6. Kulygin M. L. Stress test of nanosecond semiconductor cavity switches with subterahertz gyrotrons //IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology. – 2019. – V. 9. – No. 2. – PP. 186-192.

7. Kulygin M. L., Denisov G. G., Novikov E. A., Fokin A. P., Litovsky I. A. Switching of Subterahertz Waves Within a Duration Range of Ten Orders of Magnitude //Radiophysics and Quantum Electronics. – 2019. – V. 61. – No. 8-9. – PP. 603-613.
8. Иванов О. В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах. – Ульяновск: УлГТУ, 2010.