

Волновые процессы в нелокально-связанных ансамблях нелинейных осцилляторов дробного порядка

М.А. Гордиенко, Э.А. Ралдугина, В.В. Перепеловский

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

Аннотация: Рассмотрены нелокально-связанные осцилляторы дробного порядка в режиме динамического хаоса (НОДП). Обнаружена спорадическая синхронизация в НОДП. Впервые проведено сравнение двух способов задания производной дробного порядка уравнений Лоренца в рамках метода Эйлера. Рассмотрена задача синхронизации ансамбля НОДП. Обнаружены кластеры синхронизации в ансамбле НОДП. Рассмотрена задача возбуждения волн в НОДП. Исследование применимо для осцилляторов на основе мемристоров, а также для описания процессов синхронизации популяции нейронов.

Ключевые слова: нелокальная связь, локальная связь, детерминированный хаос, уравнения Лоренца, осцилляторы дробного порядка, дробная производная, спорадическая синхронизация, синхронизация, химеры, ансамбль нелинейных осцилляторов, мемристоры.

1. Введение

Образование различных структур и появление волновых процессов после взаимодействия нескольких динамических систем привлекает внимание исследователей последние несколько лет. Одной из задач о взаимодействии систем является задача о синхронизации, которая рассматривает временную и пространственную связь между системами или их элементами, а также результаты таких взаимодействий. Динамические системы, которые участвуют в синхронизации, могут быть одномерными [1, 2, 6, 8, 9] или многомерными [3–5, 7], описываться линейными [1, 8] или нелинейными [2–7, 9] дифференциальными уравнениями с целочисленным [1–6, 8, 9] или дробным [7] порядком производной, быть связанными локальной [3, 7, 8] или нелокальной [1, 2, 4–6, 9] связью друг с другом. В зависимости от параметров динамических систем и связи между системами, может возникать множество стационарных или динамических состояний. В частности, наблюдаются химерные структуры [1–5], бегущие волны [6, 7] и солитоны [8, 9]. Так как схемотехническая реализация осцилляторов на основе мемристоров может описываться уравнениями Лоренца [10, 11], данное исследование применимо как для моделирования отдельных осцилляторов на мемристорах [12], так и для цепочек осцилляторов [13]. В области системной нейробиологии нейронные цепи изобилуют нелинейностями на всех уровнях описания, что делает линейные методы моделирования и интуицию исследователей ненадежными [14]. Модели должны основываться на нелинейных математических теориях динамических систем [15], поскольку функционирующие нейроны динамичны по своей природе. Таким образом, рассматриваемые нелинейные динамические модели возможны для применения в нейробиологии.

2. Исследуемая система и результаты моделирования

В данной работе рассматриваются нелокально-связанные хаотические осцилляторы дробного порядка. Для описания динамики хаотических осцилляторов была выбрана система нелинейных дифференциальных уравнений Лоренца (1) [16].

Помимо хаотической динамики, системы обладают так называемым эффектом памяти, который реализуется за счёт замены целочисленных производных на операторы дробного дифференцирования. Одним из способов численного расчёта дробной производной является дифференциал Грюнвальда-Летникова (2) [17].

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \delta y - \delta x, \\ \frac{dy}{dt} = rx - xz - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (1) \quad \frac{d^q}{dt^q} f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^q} \sum_{j=0}^{[t/\Delta t]} (-1)^j C_j^q f(t - j\Delta t), \quad (2)$$

где δ , r и β – параметры системы; q – порядок дробной производной; Δt – шаг по времени; C_j^q – биномиальные коэффициенты.

Как видно из формулы (2), дробная производная в какой-либо точке функции предполагает расчёт суммы, где каждое слагаемое этой суммы – произведение соответствующего биномиального коэффициента и значения функции в предыдущий момент времени. Иными словами, на значение дробной производной в определенный момент времени будут влиять все предыдущие значения функции.

В системе дифференциальных уравнений Лоренца (1) замену целочисленной производной на дробную можно осуществить двумя способами, записав её в левой или в правой части уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} = \delta y - \delta x, \\ \frac{d^q y}{dt^q} = rx - xz - y, \\ \frac{d^q z}{dt^q} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{d^{1-q}}{dt^{1-q}} (\delta y - \delta x), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{d^{1-q}}{dt^{1-q}} (rx - xz - y), \\ \frac{dz}{dt} = \frac{d^{1-q}}{dt^{1-q}} (xy - \beta z). \end{cases} \quad (4)$$

В зависимости от расположения дробной производной, будет меняться алгоритм численного решения системы.

Для упрощения расчёта дробной производной можно ограничить количество слагаемых каждой итерации в формуле (2). Такое упрощение будем называть окном, а выбранное количество слагаемых – шириной окна m .

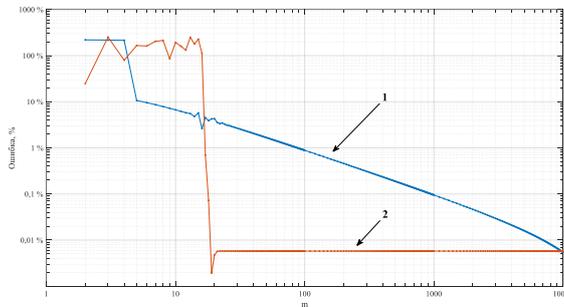


Рисунок 1. Зависимость результирующей погрешности численного метода от ширины окна m : 1 – погрешность решения при записи дробной производной в левой части уравнений (3); 2 – погрешность решения при записи дробной производной в правой части уравнений (4).

На рис. 1 показана результирующая погрешность решения системы уравнений Лоренца дробного порядка при использовании окна. Таким образом, численное решение системы уравнений Лоренца дробного порядка алгоритмом, предполагающем запись дробной производной в правой части уравнений (4), даёт меньшую результирующую погрешность, чем алгоритм, предполагающий запись дробной производной в левой части уравнений (3). Далее под осциллятором дробного порядка (ОДП) будет пониматься система уравнений Лоренца дробного порядка, содержащая дробную производную в правой части уравнений (4).

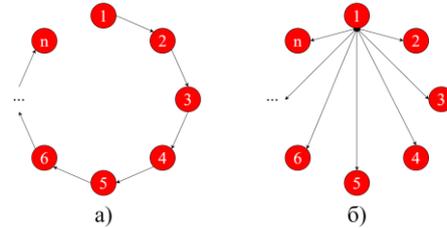


Рисунок 2. Виды связи между осцилляторами. (а) – локальная однонаправленная связь; (б) – нелокальная радиальная связь. n – общее количество осцилляторов, входящих в систему.

На рис. 2 схематично представлены два вида связи осцилляторов: локальная однонаправленная (а) и нелокальная радиальная (б) связь. Под локальной однонаправленной связью понимается влияние каждого i -го осциллятора, за исключением последнего, на $i + 1$ осциллятор. Под нелокальной радиальной связью понимается взаимное влияние первого (ведущего) осциллятора на все остальные (ведомые) осцилляторы.

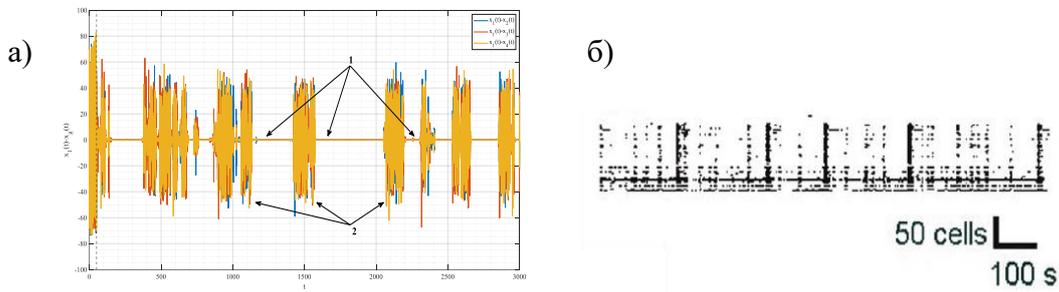


Рисунок 3. а) Спорадическая синхронизация четырёх нелокально-связанных осцилляторов дробного порядка. На графике представлена разность решений ведущей и ведомых систем: 1 – области синхронизации; 2 – области рассинхронизации. б) Экспериментальные зависимости процессов синхронизации от времени. Каждая точка соответствует активному состоянию нейрона [18].

На рис. 3, а) представлены разности решений ведущего осциллятора и решений ведомых осцилляторов по отдельности, связанных нелокальной радиальной связью (рис. 2, б), при этом наблюдается спорадическая синхронизация – на различных временных интервалах системы могут как полностью синхронизироваться друг с другом, так и рассинхронизироваться. Подобное поведение системы достаточно часто встречается при изучении процесса синхронизации нейронов головного мозга [15]. Так на рис. 3, б) приведены экспериментальные данные, полученные при наблюдении за популяцией из 50 нейронов в течение 100 секунд. При сравнении разности решений ведущего и ведомых осцилляторов с популяцией нейронов, становится очевидно, что для обеих рассматриваемых систем характерны кратковременные моменты синхронизации, сопровождаемые периодом релаксации. При этом уравнения Лоренца используются для описания нейронных конфигураций, зависящих от силы связи и

конфигурации популяции нейронов [19]. Дробная производная в уравнении позволяет воссоздать эффект нейропластичности, то есть изменения параметров нейрона под действием передаваемого сигнала [20].

На рис. 4 представлены решения 20 нелокально-связанных (рис. 2, б) осцилляторов дробного порядка (НОДП), при этом наблюдается образование химерных состояний – часть осцилляторов двигается по одной траектории (красная группа осцилляторов), а часть по другой (синяя группа осцилляторов). Помимо этого, каждая группа обладает различными свойствами: осцилляторы красной группы двигаются строго по своим траекториям, а осцилляторы синей группы рассинхронизируются.

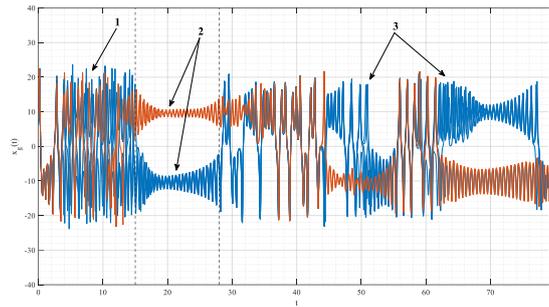


Рисунок 4. Химерные состояния в ансамбле из 20 НОДП: 1 – область отсутствия связи между осцилляторами; 2 – область образования химерных структур; 3 – динамика химерных структур.

На рис. 5 представлен профиль бегущей волны в ансамбле из 500 осцилляторов дробного порядка, связанных нелокальной и локальной связью (рис. 2). Волна возбуждается посредством изменения координаты 5-го осциллятора по гармоническому закону. При этом волна имеет ограничение по количеству пространственных периодов в зависимости от частоты возбуждающего осциллятора.

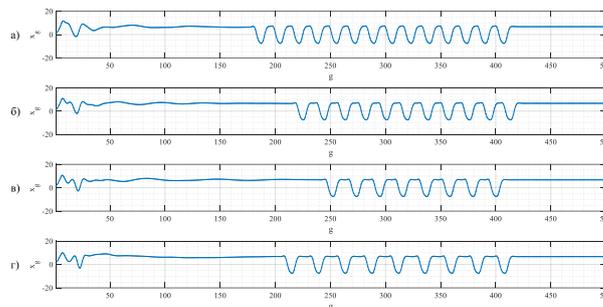


Рисунок 5. Бегущие волны в ансамбле из 500 НОДП: (а) – частота возбуждающего осциллятора $f = 1$; (б) – частота $f = 0,9$; (в) – частота $f = 0,8$; (г) – частота $f = 0,7$.

3. Заключение

Проведено сравнение двух алгоритмов решения системы уравнений Лоренца дробного порядка. Обнаружена спорадическая синхронизация в НОДП. Обнаружены двухъямные химерные структуры в ансамбле НОДП. Проведён анализ возбуждения бегущих волн в ансамблях осцилляторов дробного порядка с хаотической динамикой, связанных локальной и нелокальной связью. Данное исследование может применяться при моделировании цепочек связанных осцилляторов на основе мемристоров. Рассмотренная система уравнений Лоренца с дробной производной позволяет моделировать нейронные ансамбли, так как последние являются высоко нелинейной системой изменяющейся при передаче сигнала.

Список литературы

1. Kapitaniak T. et al. Imperfect chimera states for coupled pendula //Scientific reports. – 2014. – Т. 4. – С. 6379.
2. Богомолов С. А. и др. Пространственно-временные структуры в ансамбле нелокально связанных отображений Некоркина //Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. – 2019. – Т. 19. – №. 2.
3. Дмитричев А. С., Шапин Д. С., Некоркин В. И. Клонирование химерных состояний в мультиплексной сети двухчастотных осцилляторов с линейными локальными связями //Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2018. – Т. 108. – №. 8. – С. 574-579.
4. Шепелев И. А., Вадивасова Т. Е. Уединенные состояния в 2D-решетке бистабильных элементов при глобальном и близком к глобальному характеру взаимодействия //Нелинейная динамика. – 2017. – Т. 13. – №. 3. – С. 317-329.
5. Rybalova E. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. Mechanism of realizing a solitary state chimera in a ring of nonlocally coupled chaotic maps //Chaos, Solitons & Fractals. – 2018. – Т. 115. – С. 300-305.
6. Шабунин А. В. Мультистабильность бегущих волн в ансамбле гармонических генераторов с дальнедействующими связями //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2018. – Т. 26. – №. 1.
7. HosseinNia S. H., Tejado I., Vinagre B. M. Stability of fractional order switching systems //Computers & Mathematics with Applications. – 2013. – Т. 66. – №. 5. – С. 585-596.
8. Майер Р. В. Изучение колебаний связанных осцилляторов и решение уравнения синус-гордона //Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2013. – №. 15. – С. 102-109.
9. Taheri H. et al. Self-synchronization phenomena in the Lugiato-Lefever equation //Physical Review A. – 2017. – Т. 96. – №. 1. – С. 013828.
10. Jahanshahi H. et al. A new fractional-order hyperchaotic memristor oscillator: Dynamic analysis, robust adaptive synchronization, and its application to voice encryption //Applied Mathematics and Computation. – 2020. – Т. 383. – С. 125310.
11. Wang C., Zhou L., Wu R. The design and realization of a hyper-chaotic circuit based on a flux-controlled memristor with linear memductance //Journal of Circuits, Systems and Computers. – 2018. – Т. 27. – №. 03. – С. 1850038.
12. Itoh M., Chua L. O. Memristor oscillators //International journal of bifurcation and chaos. – 2008. – Т. 18. – №. 11. – С. 3183-3206.
13. Parastesh F., Jafari S., Azarnoush H. Traveling patterns in a network of memristor-based oscillators with extreme multistability //The European Physical Journal Special Topics. – 2019. – Т. 228. – №. 10. – С. 2123-2131.
14. Miller P. Dynamical systems, attractors, and neural circuits [version 1; peer review: 3 approved]. F1000Research 2016, 5(F1000 Faculty Rev):992 (<https://doi.org/10.12688/f1000research.7698.1>)
15. Bick, C., Goodfellow, M., Laing, C.R. et al. Understanding the dynamics of biological and neural oscillator networks through exact mean-field reductions: a review. J. Math. Neurosc. 10, 9 (2020). <https://doi.org/10.1186/s13408-020-00086-9>
16. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow //Journal of atmospheric sciences. – 1963. – Т. 20. – №. 2. – С. 130-141.
17. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка, и некоторые их приложения/СГ Самко, АА Килбас, ОИ Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987
18. Scale-free and economical features of functional connectivity in neuronal networks Jean-Philippe Thivierge Phys. Rev. E 90, 022721 – Published 29 August 2014
19. Chang, Yi-Fang. (2012). Neural Synergetics, Lorenz Model of Brain, Soliton-Chaos Double Solutions and Physical Neurobiology. NeuroQuantology. 11. 10.14704/nq.2013.11.1.601.
20. A theory of loop formation and elimination by spike timing-dependent plasticity James Kozloski* and Guillermo A. Cecchi Biometaphorical Computing, Computational Biology Center, IBM Research Division, IBM T. J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY, USA, HYPOTHESIS AND THEORY ARTICLE Front. Neural Circuits, 2010 <https://doi.org/10.3389/fncir.2010.00007> (<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2856591/>)