

Давидович М.В., Бушуев Н.А
Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Замедляющая система прямоугольный волновод с периодическими диафрагмами

Предложены быстрые и достаточно точные модели для ЗС типа двойные сдвинутые гребенки в прямоугольном экране и ЗС петляющий волновод на основе расчета проводимости диафрагм в прямоугольном волноводе (ПВ). Получена проводимость емкостной диафрагмы в ПВ при электрической и магнитной широких стенках. Рассчитана дисперсия двойной сдвинутой гребенки и петляющего волновода.

Ключевые слова: Замедляющая система, диафрагма, прямоугольный волновод, дисперсия, сопротивление связи.

В ЛБВ ТГц микроэлектроники перспективны ленточные электронные пучки большой ширины и малой толщины с токами порядка 0.1–1.0 А, которые должны проходить через узкие в одном из поперечных направлений каналы [1,2]. Для достижения приемлемой мощности необходимы релятивистские ТГц ЛБВ (напряжения 20 кВ и более), поэтому высоких замедлений не требуется, и задача проектирования замедляющих систем (ЗС) состоит в увеличении широкополосности и сопротивления связи R_c . Перспективными и технологичными ЗС для этого являются широкие двусторонние гребенки со сдвинутыми гребнями в прямоугольном экране, рис. 1 [1,2]. Их анализ на основе коммерческих пакетов программ требует весьма больших ресурсов, что делает оптимизацию весьма затруднительной. Поэтому задача получения быстрых алгоритмов важна. Цель работы – получение моделей на основе аналитических результатов, обладающих высокой точностью и вычислительными затратами на порядки меньшими, чем строгие модели типа [2].

ЗС 1, рис. 1 может быть использована для расширения полосы и повышения R_c . Периоды гребенок кратные (для ЗС 1 их отношение 2:1). Более мелкую гребенку можно рассматривать как импедансную поверхность, управляющую дисперсией и R_c . Области брегговских резонансов второй гребенки более высокочастотные, что и объясняет расширение полосы. ЗС рис. 1 можно рассматривать как диафрагмированные прямоугольные волноводы (ПВ). Простые модели таких ЗС получаются для бесконечно тонких диафрагм, для которых R_c максимально. Пренебречь толщиной δ диафрагм вполне можно, если $\delta/d < 0.1$. Сдвинутые на $d/2$ гребенки обладают плоскостью скользящей симметрии, что приводит к слияния низших и высших по частоте прямых и обратных дисперсионных ветвей при фазовом сдвиге $\Psi = \pi$ и к существенному расширению полосы [2]. У симметричной гребенки (2, рис. 1) при $\Psi = \pi$ возникает запрещенная зона [2]. В случае больших высот h при сдвиге возникает перекрытие канала (3, рис. 1). В этом случае двойная симметричная сдвинутая на $d/2$ гребенка с диафрагмами толщины $\delta = d/8$ есть ЗС типа петляющий волновод. В диафрагмах необходим пролетный канал (пучок на рис 1. показан пунктиром). По оси y ПВ имеет размер $b \gg a$, что приводит к низкочастотной

отсечке при волновом числе $k_0 = k_y = \pi/b$. Для симметричной ЗС 2 возможны решения с электрической и магнитной стенками при $x = 0$. Первый случай эквивалентен одиночной гребенке в ПВ с половинным размером $a/2$, а второй – одиночной гребенке в ПВ с половинным размером и с широкой магнитной стенкой. Первый случай имеет меньшую величину R_c и не интересен. Второй требует решения, которое отсутствует в литературе и далее будет получено. Рассматриваем бесконечно тонкие диафрагмы без диссипации и не учитываем взаимодействие по высшим затухающим (эванесцентным) модам. При расстоянии между диафрагмами порядка $d/2$ это взаимодействие слабое, и им можно пренебречь. При его уменьшении взаимодействие растет и при соединении диафрагм в одну приводит к следующему результату: вместо суммарной проводимости $2y$ от двух диафрагм в схеме реально имеем проводимость одиночной диафрагмы y . С хорошей степенью точности можно определить проводимости взаимодействующих на расстоянии Δ одинаковых диафрагм как $\tilde{y} = y(1 - \exp(-\alpha\Delta)/2)$, где $y = iB$ – проводимость одиночной диафрагмы. Величина α определяет затухание, и в качестве нее можно взять коэффициент затухания первой высшей моды, например, $\alpha = \sqrt{(\pi/a)^2 + (\pi/b)^2 - k_0^2}$ для ПВ. Физический смысл введенной поправки в том, что запасенная около одиночной диафрагмы реактивная мощность уменьшается в промежутке между двумя диафрагмами и делится между ними. Строгая полевая модель приведена в конце работы.

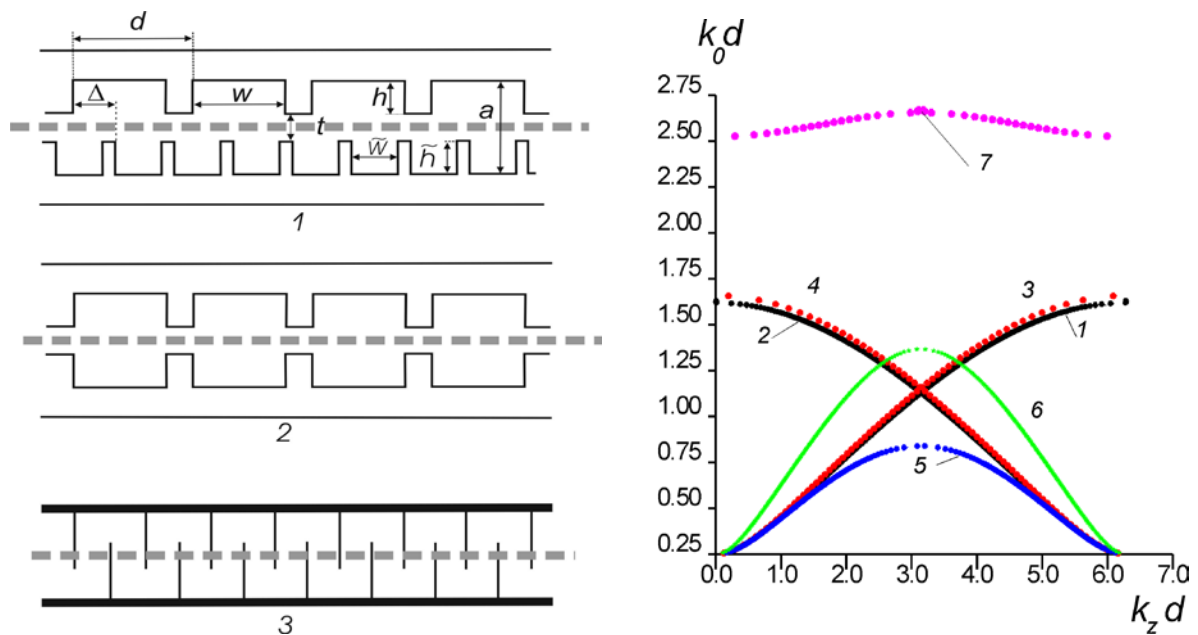


Рис. 1. ЗС типа гребенка (а) как конфигурации диафрагм в ПВ и дисперсия ЗС 3 (кривые 1-6) и 2 с магнитной стенкой (7)

Рассмотрим периодический диафрагмированный ПВ с LE-волнами [3], для которых $E_y = 0$. Соответственно вводим магнитный вектор Герца $\mathbf{\Pi}^m = \mathbf{y}_0(k_0/k^2)H_y$, $k = \sqrt{k_0^2 - k_y^2}$. Зависимости от y компонент E_x , H_y и E_z в виде множителей $\sin(k_y y)$ и y компонент H_x , H_z в виде $\cos(k_y y)$ опускаем. Тогда зависящие от x и z поля имеют вид

$$E_x(x, y) = \frac{ik_0 Z_0}{k^2} \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z}, \quad E_z(x, y) = \frac{-ik_0 Z_0}{k^2} \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial x}, \quad (1)$$

$$H_x(x, y) = \frac{k_y}{k^2} \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial x}, \quad H_z(x, y) = \frac{k_y}{k^2} \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z}. \quad (2)$$

Согласно (1) импеданс LE_{m1}-моды $\tilde{Z}_m = (k_0 k_{zm} / k^2) Z_0$, $Z_0 = (\mu_0 / \varepsilon_0)$. Решение для регулярных по y неоднородностей ПВ следует из решения задачи для плоскопараллельного волновода ($k_y = 0$) путем замены $k_0 \rightarrow k = k_{z0}$ [3], что справедливо только для плоских неоднородностей. Для них нормированные адмитансы пропорциональны $\tilde{Z}_0 / \tilde{Z}_m = k / k_{zm}$ в ПВ и $Z_0 / \tilde{Z}_m = k_0 / k_{zm}$ в плоскопараллельном волноводе. Проводимость емкостной диафрагмы $y = iB$ с размером выступа h с центром апертуры при x_0 берем в виде $B = -(2ka / \pi) \ln[\sin(\pi h / (2a)) \sin(\pi x_0 / a)]$ [3]. Для нахождения проводимости симметричной емкостной диафрагмы с магнитной стенкой при $x = 0$ берем разложение H_y по функциям $\sin(k_{xm} x) \exp(\pm i k_{zm} z)$, $k_{zm} = \sqrt{k_0^2 - k_{xm}^2 - k_y^2}$, $k_{xm} = (2m - 1) / a$ с учетом условий излучения. Выражая компоненты полей из (1), (2) и сшивая по методике [3], получаем нормированную на импеданс $\tilde{Z}_1 = Z_0 k_0 k_{z1} / k^2$ моды LE₁₁ входную проводимость $Y_{in} = (1 - R) / (1 + R) = 1 + iB$, где

$$B \sin(k_{x1} x) \int_{-t/2}^{t/2} E(x) \sin(k_{x1} x) dx = \int_{-t/2}^{t/2} K(x, x') E(x') dx', \quad (3)$$

$$K(x, x') = 4k_{z1} \sum_{m=2}^{\infty} |k_{zm}|^{-1} \sin(k_{xm} x) \sin(k_{xm} x'). \quad (4)$$

В (4) произошло сокращение на k_0 / k^2 . Вместо ИУ (4) можно использовать функционал

$$B = C / D = \int_0^{t/2} \int_0^{t/2} E(x) K(x, x') E(x') dx' dx / \left[\int_0^{t/2} E(x) \sin(k_{x1} x) dx \right]^2. \quad (5)$$

В (5) учтена нечетность $E(x) = E_x(x, 0)$ и нечетность ядра $K(x, x')$. Обозначим $\tau = \pi / (2a)$, $\chi = \pi x / a$, $n = 2m - 1$. Для вычисления (5) используем замену Швингера $\sin(\chi) = \sin(\tau) \sin(\theta)$ [3], приводящую к удовлетворяющему условию на ребре распределению электрического поля в виде $E(x) = E_0 \tan(\theta) \sqrt{1 - \sin^2(\tau) \sin^2(\theta)}$. Это распределение можно использовать в (5) для непосредственного получения значения B . Приведенная замена преобразует интегралы в (3) к области $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, а в (5) – к области $0 < \theta < \pi/2$. Получим квазистатическое решение ИУ (3). Имеем

$$S(x, x') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(n\chi) \sin(n\chi')}{n} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(n(\chi - \chi')) - \cos(n(\chi + \chi'))}{n}.$$

Используя формулу суммирования и замену $\sin(y') = \sin(\pi / (2a)) \sin(\theta')$, получаем

$$4S(x, x') = \ln \left(\frac{\tan((\chi + \chi') / 2)}{\tan((\chi - \chi') / 2)} \right) = \ln \left(\frac{\sin(\chi) + \sin(\chi')}{\sin(\chi) - \sin(\chi')} \right) = \ln \left(\frac{\tan((\theta + \theta') / 2)}{\tan((\theta - \theta') / 2)} \right),$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin(k_{xm} \chi) \sin(k_{xm} \chi')}{|k_{zm}|} \approx \frac{a}{\pi} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta) \sin(n\theta')}{n} - \sin(\theta) \sin(\theta') \right]. \quad (6)$$

Используя (6) в ИУ (3), получаем приведенное квазистатическое решение $E(x)$ и квазистатическое значение проводимости $B = 4\pi^{-1} k_{z1} a \cos^2(\pi / (2a)) / \sin(\pi / (2a))$. Для его уточнения подставим $E(x)$ в (5). Квадрат интеграла в знаменателе равен $D = E_0^2 a^2 \sin^4(\tau) / 4$. Рассмотрим интеграл

$$I_n = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{\sin(n\chi)\sin(\chi)\cos(\chi)}{\sqrt{\sin^2(\tau) - \sin^2(\chi)}} dx = \frac{2a}{\pi} \int_0^\tau \frac{\sin(n\chi)\sin(\chi)\cos(\chi)}{\sqrt{\sin^2(\tau) - \sin^2(\chi)}} d\chi. \quad (7)$$

Очевидно, числитель (5) равен $C = E_0^2 \sum_{m=2}^{\infty} I_{2m-1}^2 / \sqrt{(2m-1)^2 \pi^2 / a^2 - k^2}$. После замены $\sin(\chi) = \sin(\tau)\sin(\theta)$ и $\mathcal{G}(\theta) = \arcsin(\sin(\tau)\sin(\theta))$ имеем интеграл

$$I_{2m-1} = 2(a/\pi)\sin(\tau) \int_0^{\pi/2} \sin((2m-1)\mathcal{G}(\theta))\sin(\theta)d\theta. \quad (8)$$

Для его вычисления воспользуемся известной формулой:

$$\sin((2m-1)\mathcal{G}) = (2m-1) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k \sin^{2k+1}(\mathcal{G})}{(2k+1)!} \prod_{l=1}^k [(2m-1)^2 - (2l-1)^2].$$

В ней положим $\sin^{2k+1}(\mathcal{G}) = \sin^{2k+1}(\tau)\sin^{2k+1}(\theta)$. Таким образом, получаем

$$I_{2m-1} = (2m-1)a \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k (2k+1)!! \sin^{2k+1}(\tau)\sin^{2k+1}(\theta)}{(2k+1)!(2k+2)!!} \prod_{l=1}^k [(2m-1)^2 - (2l-1)^2]. \quad (9)$$

Области применимости формул: для несимметричной диафрагмы $\pi/b < k_0 < \sqrt{\pi^2/a^2 + \pi^2/b^2}$ и $\sqrt{\pi^2/a^2 + \pi^2/b^2} < k_0 < \sqrt{9\pi^2/a^2 + \pi^2/b^2}$ – для симметричной диафрагмы. В случае расположения одинаковых диафрагм на расстояниях $d/2$ значения их проводимостей корректируем множителем $(1 - \exp(-\alpha d)/4)$. Для двух близко расположенных диафрагм используем множитель $(1 - \exp(-\alpha \Delta)/2)$. Для LE₁₁-волны $\alpha = \sqrt{9\pi^2/a^2 + \pi^2/b^2 - k_0^2}$. Заметим, что симметричную диафрагму можно возбудить волной Н₁₀, и тогда в центре ее апертуры возникает электрическая стенка [3]. Но симметричный электронный пучок ее не возбуждает, и мы это не рассматриваем. Для работы с симметричным пучком следует использовать трансформатор мод от Н₁₀ к LE₁₁. Считаем, что в волновод периодически включены диафрагмы с проводимостями y_1, y_2, y_3 . Это значит, что следующая за диафрагмой y_3 будет y_1 . Задача упрощается для одинаковых расстояний $d/3$. Здесь корректирующий множитель $(1 - \exp(-\alpha d)/6)$. Одномодовое рассмотрение не позволяет различать наличие несимметричной диафрагмы на конкретной стенке ПВ. Вводим расстояния между диафрагмами Δ_1, Δ_2 и $\Delta_3 = d - \Delta_1 - \Delta_2$ соответственно от первой до второй, от второй до третьей и от третьей до следующей. Перемножая нормированные матрицы передачи диафрагмы и отрезка волновода, получаем матрицу звена диафрагма-отрезок волновода $\hat{a}_n(1,1) = \cos(k_{z1}\Delta_n)$, $\hat{a}_n(1,2) = i \sin(k_{z1}\Delta_n)$, $\hat{a}_n(2,1) = i \sin(k_{z1}\Delta_n) + y_n$, $\hat{a}_n(2,2) = \cos(k_{z1}\Delta_n) - B_n \sin(k_{z1}\Delta_n)$, в которой $B_n = |y_n|$. Полная матрица периода ЗС $\hat{a} = \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3$ связывает комплексные амплитуды $E_x(0) = E_x(d)\exp(i\Psi)$ и $ZH_y(0) = ZH_y(d)\exp(i\Psi)$ при $z=0$ с такими же амплитудами $E_x(d)$ и $ZH_y(d)$ при $z=d$ компонент электрического и магнитного полей в этих поперечных сечениях. Условия Флоке явно наложены: $\Psi = k_z d$ – фазовый сдвиг на период. В результате получаем ДУ Флоке-Блоха в виде $\cos(\Psi) = X$ и его явное решение: $\Psi = \arccos(X) = -i \ln(X \pm \sqrt{X^2 - 1})$. Здесь $X = (a_{11} + a_{22})/2$. Решение $-\Psi$ также дается этой формулой, что означает взаимный переход (неразличимость) прямых и обратных волн в периодических недиссипативных ЗС подобно взаимно противоположным волнам в волноводе. Для выделения прямой волны периодичность ЗС должна быть нарушена: введением источника, либо введением

диссипации. Тогда движение энергии идет либо в сторону от источника, либо в сторону затухания волны. Волна прямая, если фаза движется также в сторону движения энергии, и обратная в противном случае. Рассмотрим учет влияния конечной толщины диафрагмы. Пусть также на периоде имеем три диафрагмы с толщинами δ_n . Рассчитываем проводимость бесконечно тонкой диафрагмы y_n . Выполняем корректировку $\tilde{y}_n = y_n(1 - \exp(-\alpha\delta_n)/2)$. Толстую диафрагму рассматриваем как две диафрагмы \tilde{y}_n , разделенные отрезком волновода с матрицей $\hat{a}_{\delta_n}(1,1) = \hat{a}_{\delta_n}(2,2) = \cos(\gamma_n\delta_n)$, $\hat{a}_{\delta_n}(1,2) = i\rho_n \sin(\gamma_n\delta_n)$, $\hat{a}_{\delta_n}(2,1) = i\rho_n^{-1} \sin(\gamma_n\delta_n)$. В ней $\rho_n = Z_n/Z$ есть отношение волновых сопротивлений каналов, определяемых отношением постоянных распространения. Если диафрагмы несимметричны, все постоянные распространения равны k и все $\rho_n = 1$. Размер канала в области симметричной диафрагмы t_n , поэтому $\gamma_n = \sqrt{k_0^2 - \pi^2/t_n^2 - \pi^2/b^2}$, $\rho_n = \gamma_n/k_{z1}$. Если канал запредельный, то $\gamma_n = -i|\gamma_n|$, и энергия передается посредством эванесцентных мод.

Рассмотрим получение строгих электродинамических моделей. В случае двух одинаковых бесконечно тонких диафрагм берем разложение

$$H_y(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(k_{xm}x) [\alpha_m \cos(k_{zm}z) + \beta_m \cos(k_{zm}(z-d))]. \quad (10)$$

Для симметричных диафрагм $k_{xm} = (2m-1)\pi x/a$, $m = 1, 2, \dots$, $k_{zm} = \sqrt{k^2 - k_{xm}^2}$. Для несимметричных диафрагм $k_{xm} = m\pi x/a$, $m = 0, 1, 2, \dots$, а отсчет x удобно ввести от нижней стенки. Тогда следует сделать замену $\sin(k_{xm}x)$ на $\cos(k_{xm}x)$. Определяя $E_x(x, z)$ и коэффициенты через $E(x) = E_x(x, 0) = E_x(x, d)\exp(-i\Psi)$, получаем ИУ

$$\int_{-a/2}^{a/2} K(x, x') E_1(x') dx' = \cos(\Psi) \int_{-a/2}^{a/2} \tilde{K}(x, x') E_1(x') dx', \quad (11)$$

$$K(x, x') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(k_{xm}x) \sin(k_{xm}x')}{k_{zm} \tan(k_{zm}d)}, \quad \tilde{K}(x, x') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(k_{xm}x) \sin(k_{xm}x')}{k_{zm} \sin(k_{zm}d)}.$$

Если $E(x)$ есть решение ИУ (11), то фазовый сдвиг определяется из функционала

$$\cos(\Psi) = \int_{-a/2}^{a/2} E(x) K(x, x') E(x') dx' / \int_{-a/2}^{a/2} E(x) \tilde{K}(x, x') E(x') dx'. \quad (12)$$

На рис. 2 приведены результаты моделирования на основе приближенной модели с проводимостями и π на основе функционала типа (12) с двумя апертурами.

Работа грантом Российского научного фонда, проект №16-19-10033.

Библиографический список

1. Ю.В. Алехин, М.П. Апин, А.А. Бурцев и др. Сверхширокополосные лампы бегущей волны. Исследование в СВЧ-, КВЧ- и ТГЧ-диапазонах. Внедрение в производство. М.: Радиотехника, 2016. 480 с.
2. А.Г. Рожнёв, Н.М. Рыскин, Т.А. Каретникова и др. Исследование характеристик замедляющей системы лампы бегущей волны миллиметрового диапазона с ленточным электронным пучком // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 2013. Т. 56. № 8–9. С. 601–613.
3. Левин Л. Современная теория волноводов. М: ИЛ, 1954. 216 с.