УДК 621.3.088.4

Балыко И.А., Балыко А.К.
АО «НПП «Исток» им. Шокина»

Общее выражение для распределения электронов в полупроводнике при ударной ионизации и числа однокорневых деревьев в теории графов

Получено аналитическое выражение для плотности распределения вероятности флюктуации числа электронов при ударной ионизации в полупроводнике. Показано, что это распределение связано с тождеством Лагранжа – Абеля в комбинаторике и числом однокорневых деревьев в теории графов.

Ключевые слова: плотность распределения вероятности флюктуации числа электронов в лавине, ударная ионизация в полупроводнике, тождество Лагранжа - Абеля, число ветвящихся деревьев с одним корнем, теория графов

В 1964 году А.С. Тагер предложил метод расчета вероятности P(n) того, что полное число частиц (электронов), образовавшихся в результате ионизации и прошедших через слой умножения, равно n [1]. При этом он исходил из следующих посылок. Каждый акт ионизации, производимый одной частицей, представляет собой случайное событие, поэтому вероятность того, что частица, вошедшая в слой умножения, произведет mионизаций, определяется формулой Пуассона

$p_m = u^m e^{-u}/m!$, (1)

где u – среднее число ионизаций, совершаемое частицей в слое умножения.

Вероятность вылета из слоя умножения одного электрона P(1) равна вероятности того, что первичный электрон пройдет слой без соударений

$P(1) = p_0 = e^{-u}$.

Если первичный электрон совершит в слое одну ионизацию, после этого он и рожденный при этом электрон пройдут слой без ионизации, то вероятность вылета из слоя умножения двух электронов P(2) будет равна

$P(2) = p_1 p_0 = ue^{-2u}/1!$. (2)

Продолжая рассуждения, он получил для n = 3 выражение

$P(3) = p_1^2 p_0 + p_2 p_0^2 + = u^2 e^{-3u}[1/(1!)^2 + 1/2!]$ (3)

и получил общее выражение в виде

$P(n) = C_n u^{n-1} e^{-nu}$, (4)

где C_n – числовые коэффициенты, которые он нашел для n < 7

$C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = 3/2$, $C_4 = 8/3$, $C_5 = 101/24$, $C_6 = 44/5$.

Поскольку в лавине участвует огромное число электронов, то цель настоящей работы –получить общее аналитическое (без числовых коэффициентов) выражение для распределения вероятности P(n).

Так как речь идет о числе электронов, то оценим возможность применения известных результатов из теории чисел.

Рассмотрим случай с n = 4. Четыре электрона вылетят из слоя умножения, если в слое произойдут три ионизации. Это возможно, если:

а) первичный электрон произвел три ионизации и далее этот электрон и рожденные им три электрона пройдут слой без ионизаций,
б) первичный электрон произвел две ионизации и одну ионизацию произвел рожденный им электрон,
в) первичный электрон произвел одну ионизацию, затем рожденный электрон произвел одну ионизацию, а затем и рожденный при этом электрон произвел одну ионизацию.

Если перейти от физической картины ионизаций частиц к описанию этого процесса с помощью чисел, например, числа ионизаций, то получаем задачу о разбиении целого числа на одну, две, три и т. д. частей. В случае четырех электронов и трех ионизаций пункты а) – в) можно представить в виде равенств: 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1. Этот раздел математики, как известно, называется теорией разбиений [2]. Несмотря на всю привлекательность теории разбиений непосредственно к решению нашей задачи она не применима, поскольку в ней комбинации с переменой мест чисел (например, 2 + 1 и 1 + 2) считаются неразличимыми, то есть одинаковыми. При ионизациях частиц два процесса, когда в одном первичный электрон произвел две ионизации, а рожденный электрон произвел одну ионизацию и в другом, когда первичный электрон произвел одну ионизацию, а рожденный электрон произвел две ионизации, разнятся существенно. Исходя из этого, следует учитывать все комбинации с переменой мест частей, на которые разбивается целое число. Например

4 = 3 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1+ 1 + 1
2 + 2 = 1 + 2 + 1
1 + 3 = 1 + 1 + 2

1 3 3 1

Обращает на себя внимание результат, не отмеченный даже в популярной книге [3] – число разбиений натурального числа полностью совпадает со строкой знаменитого треугольника Паскаля, в котором, как известно, числа в строке являются биноминальными коэффициентами. Для объяснения найденной взаимосвязи числа разбиений на части натурального числа и чисел в треугольнике Паскаля рассмотрим, например, случай с n = 4.

Видно, что число комбинаций в первой колонке – число чисел от n – 1 до 1, которое равно биноминальному коэффициенту C_{n-1}^{1}. Число комбинаций во второй колонке – это число чисел от n – 2 до 1 плюс число чисел от n – 3 до 1 плюс число чисел от n – 4 до 1 и так далее до числа чисел от n – (n – 1) до 1, то есть $\sum_{k=2}^{n-1}(n-k) = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$, а это не что иное, как следующий биноминальный коэффициент C_{n-1}^{2} и т. д.

Учет комбинаций с переменой мест частей, на которые разбивается целое число, хотя и приблизил решение, ноне позволил полностью решить нашу задачу. Для объяснения этого необходимо рассмотреть полную физическую задачу ионизаций. Следуя ей, подобно формулам (2) и (3), можно записать выражение для вероятности вылета из слоя умножения четырех электронов

$P(4) = p_3p_0^3 +(2p_2p_1 + p_1p_2)\, p_0^2 + p_1^3p_0= p_3p_0^3 + 3\, p_1p_2p_0^2 + p_1^3p_0$.

В результате получим коэффициент в распределении вероятности (2) для n = 4

$P(4) = u^3e^{-4u}\, [1/1!^3 + 3/(2!\, 1!)+1/3!]$.

Для большего числа электронов количество комбинаций увеличивается. После их аналогичного подсчета были получены следующие выражения для вероятностей

$P(5) = p_1^4p_0 + 6\, p_1^2p_2p_0^2 + (2\, p_2^2p_0^3 + 4\, p_3\, p_1)\, p_0^3 + p_4p_0^4 = u^4e^{-5u}\, [1/(1!)^4 + 6/(2!\, 1!^2)+2/2!^2 +$
$+ 4/(3!\, 1!) + 1/4!]$.

$P(6) = p_1^5p_0 + 10\, p_1^3p_2p_0^2 + 10\, (p_2^2p_1 + p_3\, p_1^2)\, p_0^3 + 5\, (p_3p_2 + p_4\, p_1)\, p_0^4 + p_5p_0^5= u^5e^{-6u}\, [1/(1!)^5$
$+ + 10/(2!1!^3)+10/(2!^2\, 1!)+10/(3!1!^2) + 5/(3!2!)+ 5/(4!1!) + 1/5!]$.

Из этих формул рассчитаем значения числовых коэффициентов в распределении вероятности (2)

C_4 = 1/1!^{3} + 3/(2! 1!)+1/3! = 8/3 = 4^3/4!,
C_5 =1/(1!)^4 + 6/(2! 1!^{2})+2/2!^{2} + 4/(3! 1!) + 1/4! = 125/24 = 5^4/5!,
C_6= 1/(1!)^5 +10/(2!1!^{3})+10/(2!^{2} 1!)+10/(3!1!^{2}) + 5/(3!2!)+ 5/(4!1!) + 1/5! =54/5 = 6^5/6!,

С учетом этих значений, а также найденных в [1] первых четырех правильных значений C_1= 1 = 1/1!, C_2= 1 = 2^1/2!, C_3= 3/2 = 3^2/3!, C_4= 8/3 = 4^3/4! получаем общее выражение для коэффициентов распределения (4):

$$C_n = \frac{n^{n-1}}{n!}.$$

В результате аналитическое выражение для распределения вероятности вылета из слоя умножения n электронов (4) принимает окончательный вид

$$P(n) = \frac{(u \cdot n)^{n-1} \cdot e^{-u \cdot n}}{n!}.$$

В этом выражении нет числовых коэффициентов, поэтому оно носит общий характер и его можно использовать для любого сколь угодно большого числа электронов.

Поскольку из определения плотности вероятности

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u \cdot n)^{n-1} e^{-u \cdot n}}{n!} = 1,$$

то, продифференцировав обе части этого уравнения по u,получим тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u \cdot n)^{n} e^{-u \cdot n}}{n!} = \frac{1}{1-u},$$

которое строго было доказано Лагранжем, позднее в более общем виде Абелем, Тождество широко используется в комбинаторике [4].

Формулу (11) можно также строго доказать. Вычислим сумму

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u \cdot n)^{n-1} e^{-u \cdot n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u \cdot n)^{n-1} \cdot (-1)^k \cdot (u \cdot n)^k}{n! k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{u^{n+k-1} \cdot n^{n+k-1}}{n! k!}.$$

Обозначая $m = n+ k$ и используя выражение для биноминальных коэффициентов, приходим к выражению

$$A = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{u^{m-1}}{m!} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cdot C_k^m \cdot (m-k)^{m-1}$$

В работе [5], было показано, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cdot C_k^m \cdot (m-k)^{m-1} = 0$$

при любом m > 1, поэтому A = 1.

Таким образом, поставленная и частично решенная А.С. Тагером задача вычисления плотности распределения вероятности для числа ионизированных частиц (электронов) оказалась связанной с многими задачами из теории разбиений целых чисел, комбинаторики, треугольником Паскаля и тождеством Лагранжа - Абеля.

Отметим, что многочисленная ионизация частиц при соударениях приводит к размножению частиц и к разветвлению происходящего процесса рождения частиц. Нечто подобное, а именно ветвящиеся деревья, являются основой теории графов, которая получила широкое распространение при анализе и синтезе электрических цепей [6].

Графом Г = Г(X, W) называется пара множеств: X – множество вершин, W – множество ребер, соединяющих вершины. Чередующаяся последовательность вершин и ребер называется цепью. Граф Г называется связным, если любая пара его вершин соединены цепью. Связный граф, не содержащий циклов, называется деревом. Если все вершины пронумерованы, то такое дерево называется деревом с помеченными вершинами.

Одна, выделенная из помеченных вершина дерева, называется корнем, а само дерево – корневым.

Пусть n – число помеченных вершин графа, а k – число ребер в корне. Введем обозначения: $r_n.(k)$ – число деревьев с k ребрами в корне, r_n. - число деревьев с n вершинами.

Для графа с n = 1 условимся считать, что $r_1 = r_1.(0) = 1$, так же как в комбинаторике считается, что 0! = 1.

Для n > 1 имеем

$$r_n = \sum_{k=1}^{n-1} r_n(k) .$$

Граф с двумя вершинами (n = 2) имеет одно ребро (k = 1), а поскольку корнем может быть либо первая, либо вторая вершины, то число деревьев $r_2 = r_2(1) = 2! = \frac{2!}{1!} = 2^{2-1}$.

Для графа с n = 3 корень дерева может быть соединен либо с двумя ребрами (k = 2), тогда число таких деревьев равно числу вершин $r_3.(2) = 3$, либо с одним ребром (k = 1), тогда число таких деревьев равно числу сочетаний из 3 по 1, то есть $r_3.(1) = 3! = 6$, а общее число таких деревьев

$$r_3 = r_3(1) + r_3(2) = 3! + 3 = \frac{3!}{1!} + \frac{3!}{2!} = 3! \cdot (\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}) = 9 = 3^2 = 3^{3-1}.$$

Рассуждая аналогичным образом, определим число деревьев для графов с n = 4, n = 5, n = 6 и т.д.

$$r_4 = \sum_{k=1}^{3} r_4(k) = 4! \cdot (1 + \frac{1}{2!}) + 4! + 4 = 4! + \frac{4!}{1!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} = 4! \cdot (\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}) = 64 = 4^3 = 4^{4-1},$$

$$r_5 = \sum_{k=1}^{4} r_5(k) = 5! \cdot (2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}) + 5! \cdot (1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!}) + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{4!} = 5! \cdot (\frac{3}{1!} + \frac{4}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}) = 625 = 5^4 = 5^{5-1},$$

$$r_6 = \sum_{k=1}^{5} r_6(k) = 6! \cdot (\frac{6}{1!} + \frac{8}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{1}{(2!)^2} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}) = \frac{6!}{5!} \cdot (720 + 480 + 60 + 30 + 5 + 1) = 6^5 = 6^{6-1}.$$

Обобщая полученные выражения, приходим к общей формуле для числа деревьев с n помеченными вершинами и одним корнем

$$r_n = n^{n-1} .$$

Существенно отметить, что отношение $q_n = \frac{r_n}{n!}$ в точности совпадает с коэффициентами $C_n = \frac{n^{n-1}}{n!}$, полученными при рассмотрении ударной ионизации в полупроводнике, хотя подсчет числа деревьев графа и числа ионизированных частиц проводится различными способам.

Таким образом, получены по крайней мере два различных выражения для отношения $\frac{n^{n-1}}{n!}$, содержащих обратные величины факториалов, что может свидетельствовать об универсальном характере этого отношения.

Остановимся еще на одной задаче, связанной с числовым рядом $q_n = \frac{n^{n-1}}{n!}$. (*n* = 1, 2, 3 …). Для исследования числовых рядов с бесконечным числом членов (a_1, a_2, a_3,…, a_n,), к которым, в частности, относятся и распределения вероятностей, широко используются, так называемые, производящие функции $\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$, где *x* - вещественная переменная.

Для многих числовых рядов производящие функции могут быть получены в явном виде. Изучим, можно ли найти в явном виде производящую функцию для ряда $q_n = \frac{n^{n-1}}{n!}$, которая имеет вид $\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1} \cdot x^n}{n!}$. Для этого рассмотрим экспоненту от производящей функции $Q(x) = e^{\theta(x)} = e^{q_1 \cdot x} \cdot e^{q_2 \cdot x^2} \cdot e^{q_3 \cdot x^3} .... = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \cdot x^n$.

Разлагая каждую экспоненту в произведении в бесконечный ряд и собирая члены с одинаковыми степенями x, получаем

$$Q_0 = 1$$

$$Q_1 = \frac{q_1}{1!} = 1 = \frac{2^{2-1}}{2!} = q_2$$

$$Q_2 = \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_2}{1!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{2!} = \frac{3}{2} = \frac{9}{6} = \frac{3^{3-1}}{3!} = q_3$$

$$Q_3 = \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1 \cdot q_2}{1! \cdot 1!} + \frac{q_3}{1!} = \frac{1}{3!} + \frac{2}{2!} + \frac{9}{3!} = \frac{16}{6} = \frac{4^{4-1}}{4!} = q_4$$

$$Q_4 = \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^2 \cdot q_2}{2! \cdot 1!} + \frac{q_1 \cdot q_3}{1! \cdot 1!} + \frac{q_2^2}{2!} + \frac{q_4}{1!} = \frac{1}{24} + \frac{1}{2} + \frac{9}{6} + \frac{1}{2} + \frac{16}{6} = \frac{125}{24} = \frac{5^{5-1}}{5!} = q_5 \text{ и т.д.}$$

В результате получаем выражение для суммы

$$Q(x) = e^{\theta(x)} = q_1 + q_2 \cdot x + q_3 \cdot x^2 + q_4 \cdot x^3 + ... = \frac{1}{x} \cdot \theta(x).$$

Таким образом, производящая функция *θ(x)* для ряда $q_n = \frac{n^{n-1}}{n!}$ находится из решения уравнения $\theta(x) = x \cdot e^{\theta(x)}$ и не может быть выражена в явном виде.

Библиографический список

1. Тагер А.С. Флюктуации тока в полупроводнике (диэлектрике) в условиях ударной ионизации и лавинного пробоя. ФТТ. Т. 6. 1964.
2. Эндрюс Г. Теория разбиений. Перевод с англ. Б. С. Стечкина. М.: Наука. 1982.
3. Успенский В.А. Треугольник Паскаля. Популярные лекции по математике. Вып. 43. М.: Наука. 1979.
4. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. М.: Наука. 1982.
5. Балыко И.А., Балыко А.К. Выражения для сумм рядов с биноминальными коэффициентами/ Электронная техника. Сер.1, СВЧ - техника. - 2012. – Вып. 4. – С. 49-54.
6. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука. 1982.