

## Антенные решетки Дольфа – Чебышёва

*Рассмотрена решетка излучателей, формирующая диаграмму направленности с узким лучом. Схема предложена в 1946 г. С. Дольфом и опирается на математические особенности многочленов Чебышёва (1854 г.). Решетка Дольфа - Чебышёва обеспечивает равный уровень боковых лепестков при заданной ширине главного луча антенны. Теория кольцевой антенны при заданных параметрах с опорой на многочлены Чебышёва разработана К. Баланисом, 1954 г.*

**Ключевые слова:** Антенные решетки, диаграмма направленности, многочлены Чебышёва, метод Дольфа, форма диаграммы направленности.

В 1946 году Чарлз Дольф предложил конструкцию антенной решетки [1], которая обеспечивала оптимальное соотношение между шириной луча и уровнем боковых лепестков диаграммы направленности (ДН). Фактически был предложен способ улучшения свойств линейных решеток для специального случая, в котором элементы симметрично расположены относительно центра линейки. Результирующее распределение тока вдоль решетки основывается на свойствах многочленов Чебышёва. В частности, предложенный способ обладает следующими преимуществами:

- 1) Все излучатели в решетке синфазны. Распределение тока можно рассчитать, используя заданный уровень боковых лепестков.
- 2) Распределение тока оптимально в том смысле, что оно обеспечивает заданную ширину луча [1].
- 3) Если указано положение первого бокового лепестка, то положение других боковых лепестков определяется расчетом.
- 4) Все боковые лепестки имеют одинаковый уровень.

Предложенная конструкция получила название решетки Дольфа - Чебышёва. Основой конструкции и соответствующей теории служат свойства многочленов Чебышёва, которые были предложены и исследовались им в течение ряда лет, начиная с 1854 года [2].

Многочлен Чебышёва  $n$ -ого порядка имеет вид:

$$T_n(x) = \cos[n \cdot \arccos(x)], \quad \text{или, например, для } n = 7: T_7(x) = -7x + 56x^3 - 112x^5 + 64x^7$$

Его графическое отображение представлено на рис.1:

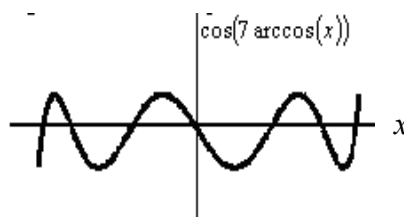


Рис. 1. Графическое представление многочлена Чебышёва 7-го порядка.

Замечательной особенностью многочленов Чебышёва является их ортогональность:

$$I_{m,n} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cdot \cos(m\theta) d\theta = \begin{cases} \pi, n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, n = m \neq 0 \\ 0, n \neq m \end{cases} \quad (1)$$

Обратим внимание на изменение многочленов Чебышёва при изменении пределов аргумента:

$$\begin{aligned} T_n(z) &= \cos[n \cdot \arccos(z)], \text{ для } -1 \leq z \leq +1. & |T_n(z)| &\leq 1 \\ T_n(z) &= \cosh[n \cdot \operatorname{arccosh}(z)], \text{ для } z < -1, z > +1. & |T_n(z)| &\geq 1 \end{aligned} \quad (2)$$

На рис.2 (а и б) в качестве примера приведены графики многочленов Чебышёва.

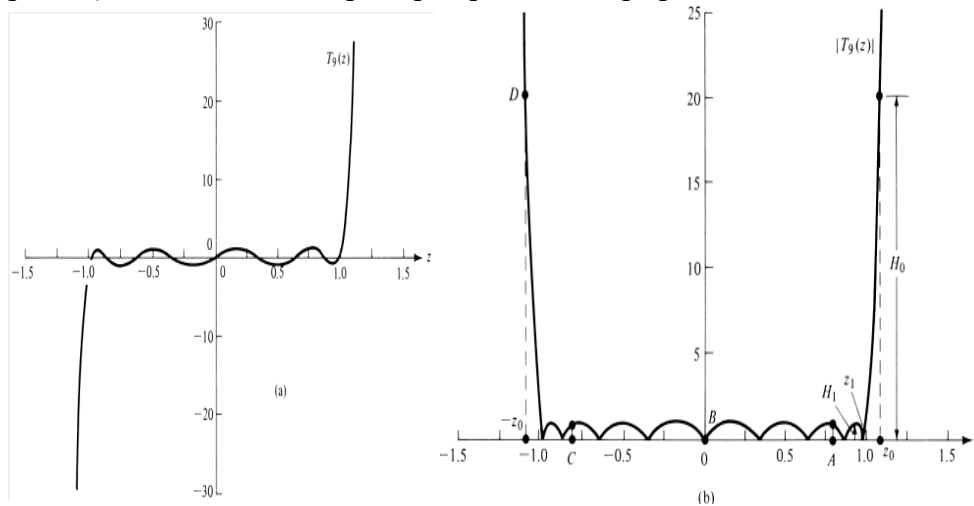


Рис.2. Графики многочлена Чебышёва 9-го порядка и модуля многочлена Чебышёва 9-го порядка.

Кривые, представленные на рис. 2 (а,б) удобно использовать для описания ДН линейной решетки. Введем параметр  $u$ , используя традиционную формулу:

$$u = \frac{2\pi d}{\lambda} \cdot \sin \theta. \quad (3)$$

Здесь  $\theta$  – угол отклонения главного луча по отношению к плоскости решетки,  $\lambda$  – длина волны,  $d$  – расстояние между излучателями. Многочлены (2) преобразованы Дольфом к следующему виду:

$$F(u) = \cos[M \cdot \arccos(z_0 \cdot \cos(u \cdot z_1))], \quad (4)$$

где  $M$  – число излучателей в линейной решетке. Параметры  $z_0$  и  $z_1$  введены Дольфом и определяют высоту и ширину главного лепестка ДН. На рис. 3 представлен результат расчета по формуле (4) с параметрами  $M = 20$ ,  $z_0 = 1,04$  и  $z_1 = 0,912$ .

При  $\theta = 90^\circ$ , переменная  $u$  максимальна и параметр  $z_0 \cdot \cos(z_1 \cdot u) > 1$ . При этом  $F(u) \gg 1$ . Эта точка ( $\theta = 90^\circ$ ) соответствует максимуму основного лепестка ДН (рис.3). Боковые лепестки соответствуют равному единице значению многочлена Чебышёва и отвечают

проведенной нормировке ДН. Параметры  $N_0$ ,  $z_0$  и  $z_1$  (рис. 2б) позволяют построить главный лепесток и найти его ширину.

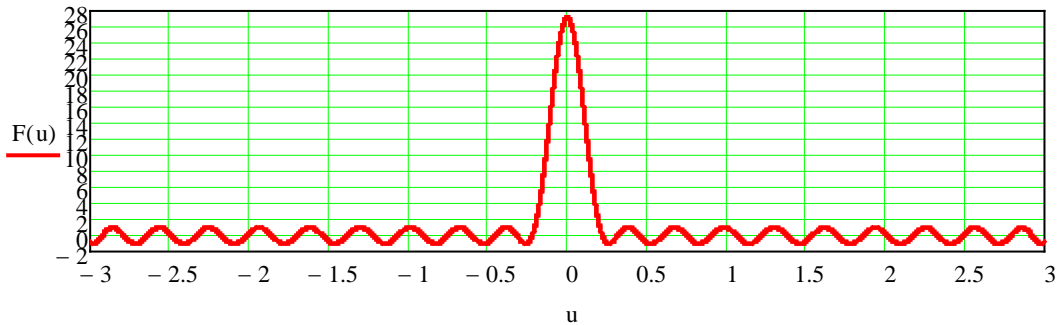


Рис. 3. ДН линейной решетки излучателей в зависимости от переменной  $u$  для  $M = 20$ ,  $z_0 = 1,04$  и  $z_1 = 0,912$ .

Представим многочлен Чебышёва, как функцию угловой координаты:

$$\Psi(\theta) = \cos \left[ M \cdot \arccos \left[ z_0 \cdot \cos \left[ \frac{2\pi d}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot z_1 \right] \right] \right] \quad (5)$$

и положим:  $d = \lambda/2$ . Тогда получим следующую форму ДН (рис. 4):

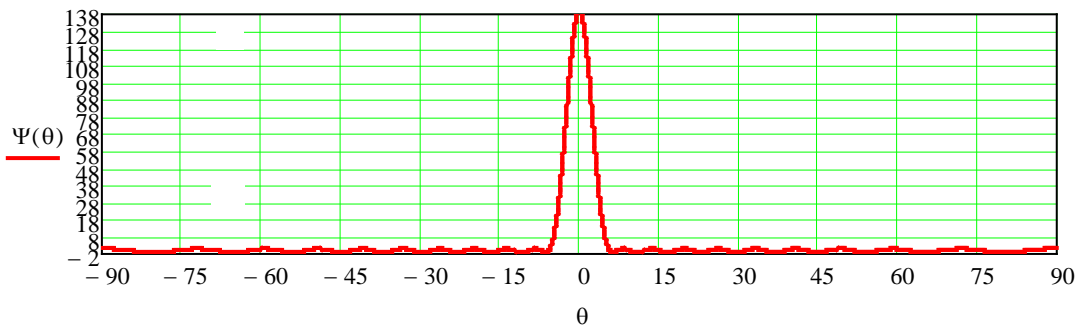


Рис. 4. ДН линейной решетки излучателей, построенная по формуле (5), в зависимости от переменной  $\theta$  при  $M = 20$ ,  $z_0 = 1,04$ ,  $z_1 = 0,912$ .

Представим ДН рис. 4 при отсчете в  $\text{дБ}$  (рис. 5):

$$\Phi(\theta) := 10 \log \left( \frac{\Psi(\theta)}{\Psi(0)} \right)$$

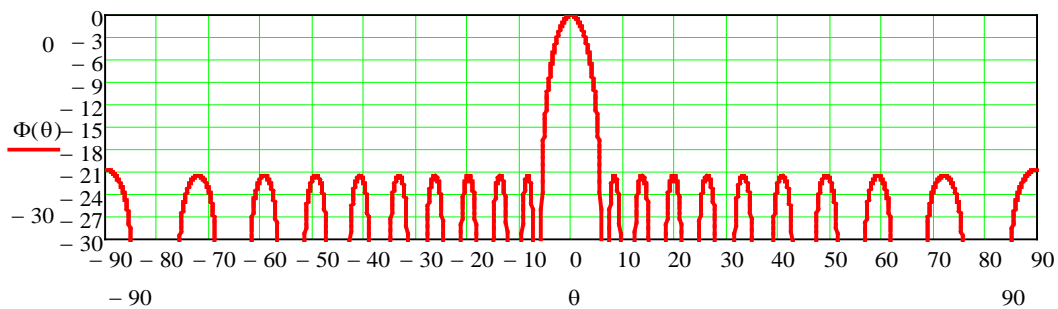


Рис. 5. ДН линейной решетки излучателей в  $\text{дБ}$  в зависимости от переменной  $\theta$  при  $M = 20$ ,  $z_0 = 1,04$ ,  $z_1 = 0,912$ . Полученная ДН характеризуется единым уровнем всех боковых лепестков, что характерно для использования многочлена Чебышёва.

Решетка излучателей может быть расположена по кольцу. Теория кольцевой решетки Дольфа - Чебышёва хорошо представлена в работах К.А. Баланиса, в частности, в его монографии [3]. ДН кольцевой решетки из двадцати излучателей (параметры:  $z_0 = 1,1$ ,  $z_1 = 0,85$ ) в полярной системе координат показана на рис.6. Отсчет в полярной системе координат производится при отрицательном радиусе. Уровень боковых лепестков ДН на рис.6 составляет - 35 дБ.

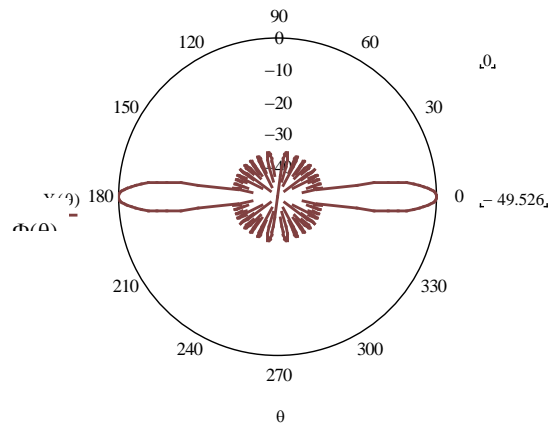


Рис. 6. ДН кольцевой решетки.

На рис. 7 представлена ДН кольцевой решетки, которая характеризуется единым уровнем всех боковых лепестков при разном расстоянии между излучателями [3]. Разное расстояние между излучателями при фиксированном числе излучателей отвечает разному диаметру кольцевой решетки. Две ДН, представленные сплошной и пунктирной линиями, соответствуют разным значениям расстояний между излучателями.

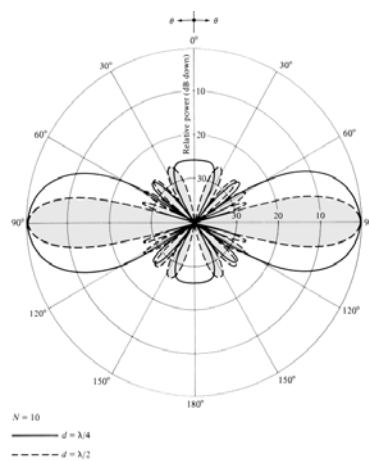


Рис. 7. ДН 10-и элементной кольцевой решетки Дольфа - Чебышёва [3].

Предложенный метод расчета антенной решетки позволяет синтезировать линейные или кольцевые решетки, обеспечивающие одинаковый уровень боковых лепестков при заданной ширине главного луча антенны.

#### Библиографический список

1. C.L. Dolph, A Current Distribution for Broadside Arrays Which Optimizes the Relationship Between Beam Width and Side-Lobe Level in Proc. of the IRE and Waves and Electrons, June, 1946. — P. 335 - 353.
2. П.Л. Чебышёв, Полное собрание сочинений. — М., Издательство АН СССР, 1944—1951.
3. С.А. Balanis, "Antenna Theory - Analyze and Deign", Third Edition, A JOHN WILEY & SONS, Inc., Publication, 2005.