

*Зарецкая Г.А., Дроздовский А.В., Калиникос Б.А.  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ»*

## **Метод расчета собственных азимутальных колебаний дисковых диэлектрических резонаторов**

*Предложен метод расчета собственных азимутальных колебаний и, как следствие, области свободной дисперсии диэлектрических дисковых резонаторов. Метод основан на применении к дисперсионному уравнению, выводимому для неограниченного по длине диэлектрического цилиндра, размерного квантования, обусловленного требованием баланса фаз для стоячих волн в резонаторе. Получены приближенные выражения, пригодные для расчета оптических микрорезонаторов, применяемых в устройствах радиофотоники.*

**Ключевые слова:** Диэлектрические дисковые резонаторы, азимутальные колебания, моды шепчущей галереи, радиофотоника.

В последнее десятилетие интенсивно развивается новое научно-техническое направление – радиофотоника, возникшее из слияния радиоэлектроники, интегральной и волновой оптики, СВЧ оптоэлектроники и ряда других отраслей науки и техники [1 – 3].

Одними из ключевых элементов компонентной базы радиофотоники являются оптические дисковые диэлектрические резонаторы с азимутальными колебаниями или, другими словами, дисковые резонаторы на модах шепчущей галереи. Под модами шепчущей понимаются моды с высоким азимутальным индексом, «прижатые» к поверхности резонатора и обладающие добротностью много большей, чем моды низших типов колебаний [4, 5].

В то же время, вследствие того, что такие резонаторы характеризуются высоким значением азимутального индекса и имеют конечные размеры по осевой координате, возникает задача определения их собственных резонансных частот и, соответственно, области свободной дисперсии.

Отметим, что существуют несколько аналитических методов оценки собственных резонансных частот дисковых диэлектрических резонаторов. К ним относятся: метод частичных областей [4], метод эффективной диэлектрической проницаемости [6], метод магнитных стенок [7]. Все вышеперечисленные методы достаточно трудоемки и требуют значительных вычислительных мощностей, так как основаны на одновременном решении двух дисперсионных уравнений, имеющих в неявный вид.

В данной работе предложен относительно простой и достаточно точный "инженерный" метод расчета собственных резонансных частот, а также области свободной дисперсии дисковых резонаторов. В сравнении с известными [4, 6, 7] предложенный метод требует меньших вычислительных и временных затрат.

Предложенный метод расчета собственных резонансных частот включает два шага. На первом шаге определяется дисперсионное уравнение для собственных волн, которые могут существовать в диэлектрическом цилиндре неограниченной длины, а на втором

шаге находится уравнение резонансных частот для диска, получаемого ограничением длины цилиндра.

Дисперсионное уравнение для собственных волн цилиндра находится из совместного решения уравнений Максвелла и материальных уравнений с применением электродинамических граничных условий. Уравнение резонансных частот для диска получается путем квантования продольного волнового вектора, входящего в дисперсионное уравнение цилиндра. При этом для определения дискретных значений продольного волнового вектора используется условие баланса фаз колебаний в диске. Заметим, что решение задачи проводится для случаев «толстого» и «тонкого» диска. (Определения «толстого» и «тонкого» диска будут пояснены ниже.).

Перейдем к математическому описанию предлагаемого метода. Выражения для компонент электрического и магнитного полей, полученные из уравнений Максвелла, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 E_z &= \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} Z_m(k_{\perp}\rho) e^{-i\beta z} \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix}, \\
 H_z &= \begin{Bmatrix} D \\ C \end{Bmatrix} Z_m(k_{\perp}\rho) e^{-i\beta z} \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix}, \\
 H_{\phi} &= -\frac{i}{k_{\perp}^2} \left[ \begin{Bmatrix} D \\ -C \end{Bmatrix} \frac{\beta m}{\rho} Z_m(k_{\perp}\rho) + \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \varepsilon_0 \varepsilon \omega Z'_m(k_{\perp}\rho) \right] e^{-i\beta z} \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix}, \\
 H_{\rho} &= \frac{i}{k_{\perp}^2} \left[ \begin{Bmatrix} -A \\ B \end{Bmatrix} \frac{m \varepsilon_0 \varepsilon \omega}{\rho} Z_m(k_{\perp}\rho) - \begin{Bmatrix} D \\ C \end{Bmatrix} \beta Z'_m(k_{\perp}\rho) \right] e^{-i\beta z} \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix}, \\
 E_{\phi} &= -\frac{i}{k_{\perp}^2} \left[ \begin{Bmatrix} -A \\ B \end{Bmatrix} \frac{\beta m}{\rho} Z_m(k_{\perp}\rho) - \begin{Bmatrix} D \\ C \end{Bmatrix} \mu_0 \mu \omega Z_m(k_{\perp}\rho) \right] e^{-i\beta z} \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix}, \\
 E_{\rho} &= -\frac{i}{k_{\perp}^2} \left[ \begin{Bmatrix} D \\ -C \end{Bmatrix} \frac{m \mu_0 \mu \omega}{\rho} Z_m(k_{\perp}\rho) + \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \beta Z'_m(k_{\perp}\rho) \right] e^{-i\beta z} \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\omega$  – круговая частота;  $A, B, C, D$  – константы, имеющие смысл амплитуд и определяющиеся из граничных условий;  $Z_m$  – цилиндрическая функция, которая имеет определенный вид в зависимости от области определения полей и поставленной задачи;  $m$  – порядок цилиндрической функции характеризующий количество вариаций поля по азимуту;

$$k_{\perp} = \begin{cases} k_{\perp 1}, & \rho \leq R; \\ k_{\perp 2}, & \rho > R \end{cases}$$

– поперечное волновое число;  $\beta$  – продольное волновое число;  $\rho$  – радиальная координата,  $\phi$  – азимутальный угол;  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость, равная диэлектрической проницаемости материала резонатора ( $\varepsilon_{res}$ ) при  $\rho \leq R$ , и диэлектрической проницаемости пространства, окружающего резонатор ( $\varepsilon_{air}$ ) при  $\rho \geq R$ , причем  $R$  – радиус резонатора, причем  $k_{\perp 1} = \sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon_{res}^2 - \beta^2}$ ;  $k_{\perp 2} = \sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon_{air}^2 - \beta^2}$ ;

Как уже было сказано выше, в решении поставленной задачи можно выделить два случая: случай «толстого» и «тонкого» диска.

Под «толстым» диском будем понимать случай, когда  $\beta > k_{air}$ . При таком условии  $k_{\perp}$  – вещественно внутри и вне резонатора. Тогда стоячие волны внутри резонатора описываются функциями Бесселя, т. е.  $Z_m(k_{\perp}\rho) = J_m(k_{\perp}\rho)$ . Вне резонатора волны описываются функциями Ханкеля первого и второго рода, т. е.  $Z_m(k_{\perp}\rho) = H_m^{(1)}(k_{\perp}\rho) + H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho)$ , что соответствует расходящимся и приходящим

сферическим волнам. При выбранной гармонической временной зависимости ( $e^{i\omega t}$ ), следует взять вторую функцию Ханкеля, которая удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда [5].

Применяя граничные условия электродинамики, в случае «толстого» диска получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{m^2}{R^2} \left( \frac{1}{k_{\perp 1}^2} - \frac{1}{k_{\perp 2}^2} \right) \left( \frac{\varepsilon_{\text{res}}}{k_{\perp 1}^2} - \frac{\varepsilon_{\text{air}}}{k_{\perp 2}^2} \right) = \left( \frac{\varepsilon_{\text{res}}}{k_{\perp 1}} \frac{J_m'(k_{\perp 1}R)}{J_m(k_{\perp 1}R)} + \frac{\varepsilon_{\text{air}}}{k_{\perp 2}} \frac{H_m'(k_{\perp 2}R)}{H_m(k_{\perp 2}R)} \right) \times \left( \frac{1}{k_{\perp 1}} \frac{J_m'(k_{\perp 1}R)}{J_m(k_{\perp 1}R)} + \frac{1}{k_{\perp 2}} \frac{H_m'(k_{\perp 2}R)}{H_m(k_{\perp 2}R)} \right), \quad (2)$$

Из уравнения (3) видно, что характер поперечных колебаний в приближении «толстого» диска имеет гибридную структуру, т. е. в решении можно выделить  $HE_{ml}$  и  $EH_{ml}$  моды.

В приближении «тонкого» диска выполняется условие  $k_{\text{res}} > \beta > k_{\text{air}}$ . В этом случае, как и в случае «толстого» диска, стоячие волны внутри резонатора будут описываться функциями Бесселя. Вне резонатора  $k_{\perp}$  принимает чисто мнимые значения. Поэтому волны вне резонатора описываются модифицированными функциями Бесселя первого и второго рода. Исходя из условия равенства поля нулю на бесконечности, в качестве решения берем модифицированную функцию Бесселя второго рода, т.е. функцию Макдональда. Ниже эта функция обозначается через  $K_m$ . Применяя граничные условия электродинамики, в случае «тонкого» диска получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{m^2}{R^2} \left( \frac{1}{k_{\perp 1}^2} + \frac{1}{(ik_{\perp 2})^2} \right) \left( \frac{\varepsilon_{\text{res}}}{k_{\perp 1}^2} + \frac{\varepsilon_{\text{air}}}{(ik_{\perp 2})^2} \right) = \left( \frac{\varepsilon_{\text{res}}}{k_{\perp 1}} \frac{J_m'(k_{\perp 1}R)}{J_m(k_{\perp 1}R)} + \frac{\varepsilon_{\text{air}}}{ik_{\perp 2}} \frac{K_m'(ik_{\perp 2}R)}{K_m(ik_{\perp 2}R)} \right) \times \left( \frac{1}{k_{\perp 1}} \frac{J_m'(k_{\perp 1}R)}{J_m(k_{\perp 1}R)} + \frac{1}{ik_{\perp 2}} \frac{K_m'(ik_{\perp 2}R)}{K_m(ik_{\perp 2}R)} \right). \quad (2)$$

Из уравнения (4) видно, что характер мод в приближении «тонкого» диска имеет гибридную структуру, то есть в решении можно выделить  $HE_{ml}$  и  $EH_{ml}$  моды. Отметим, что при  $m=0$  моды не являются гибридными. В этом случае уравнение (4) распадается на два более простых, описывающих поперечные  $TE_{0l}$  и  $TM_{0l}$  моды.

Полученные выше дисперсионные уравнения как для случая «толстого» (3), так и «тонкого» (4) диска не учитывают дискретизацию резонансных частот за счет конечной толщины резонатора. Учтем теперь влияние толщины резонатора на спектр его частот.

Применяя условие баланса фаз, определим неизвестное значение продольного волнового числа как

$$\beta = \frac{\pi \cdot n - \varphi}{d}, \quad (5)$$

где  $n$  – целое число, характеризующее количество максимумов по осевой координате,  $d$  – толщина резонатора,  $\varphi$  – подгоночный параметр, имеющий смысл фазового набега при отражении волны от границ раздела сред. Заранее оговоримся, что далее в этой работе он принимается равным нулю.

Зная значения продольного волнового числа (5), из полученных дисперсионных уравнений (3) и (4) можно определить значения резонансных частот и области свободной дисперсии, соответственно.

Следует отметить, что резонансные типы колебаний диэлектрического дискового резонатора и отвечающие им частоты характеризуются тремя индексами  $m$ ,  $l$  и  $n$ . Индекс  $m$  фигурирует в уравнениях (3) и (4) в явном виде и характеризует количество длин волн,

укладывающихся по угловой координате. Индекс  $l$  характеризует число вариаций поля по радиальной координате; он определяется номером решения уравнений (3) и (4), у которых существует бесконечное множество корней. Индекс  $n$  характеризует количество вариаций поля по оси диска.

На рисунке 1 представлены результаты расчета резонансных частот  $HE_{mln}$  для диска с диэлектрической проницаемостью равной 10, диаметром 10 см для  $m$  от 2 до 25, когда  $l=1$ . Квадратными символами на рисунке обозначены резонансные частоты, соответствующие случаю диска с толщиной  $d = 3$  см, треугольными – с  $d = 2,5$  см, круглыми – с  $d = 0,8$  см.

Как ясно из рисунка, с уменьшением толщины резонатора его резонансные частоты сдвигаются в область больших продольных волновых чисел, что в свою очередь ведет к уменьшению области свободной дисперсии и повышению частоты резонанса. С увеличением индекса  $m$  так же происходит увеличение области свободной дисперсии, причем при значениях  $m \gg 1$  спектр резонансных частот становится практически эквидистантным, а расстояние между соседними гармониками стремится к значению уровня свободной дисперсии неограниченного стержня. Более детально данное изменение проиллюстрировано на рисунке 2, где представлены результаты расчета области свободной дисперсии ( $\Delta f$ ) от азимутального индекса при различных значениях толщины дискового резонатора для  $HE_{mln}$  колебаний.

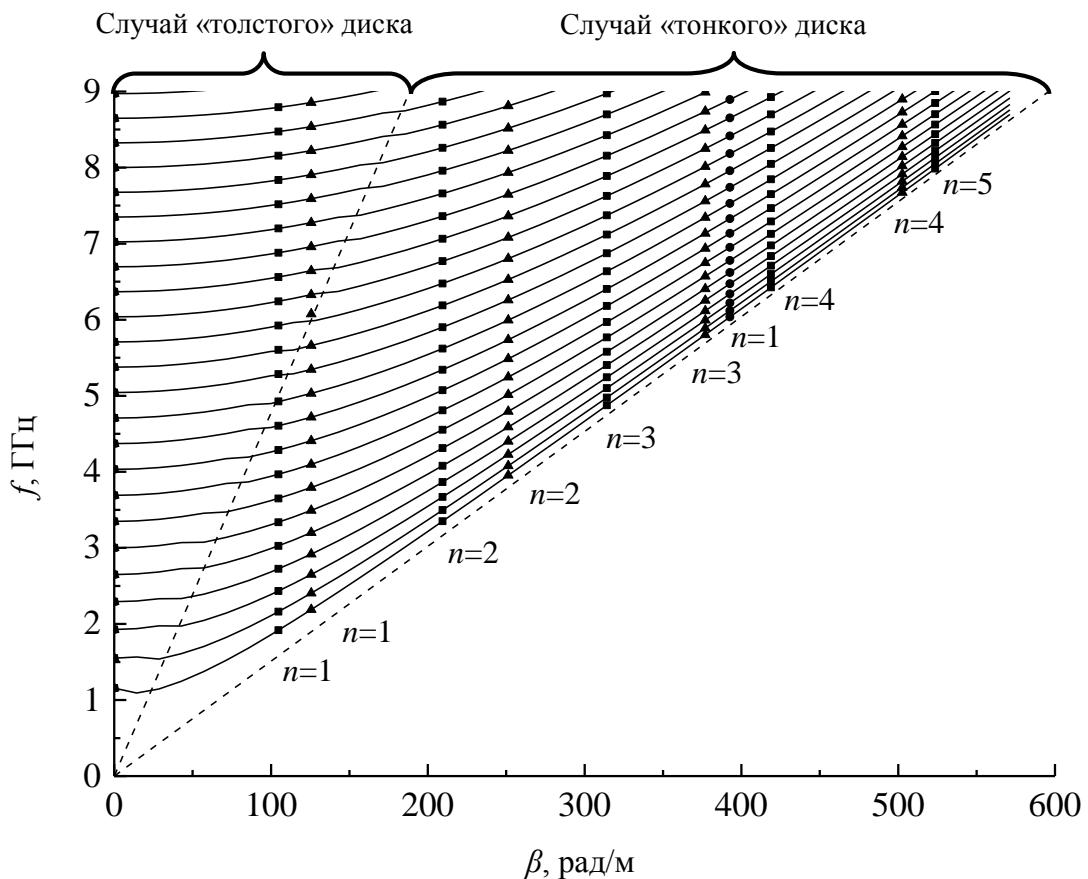


Рис. 1. Результаты расчета резонансных частот  $HE_{mln}$  дискового диэлектрического резонатора с азимутальными колебаниями

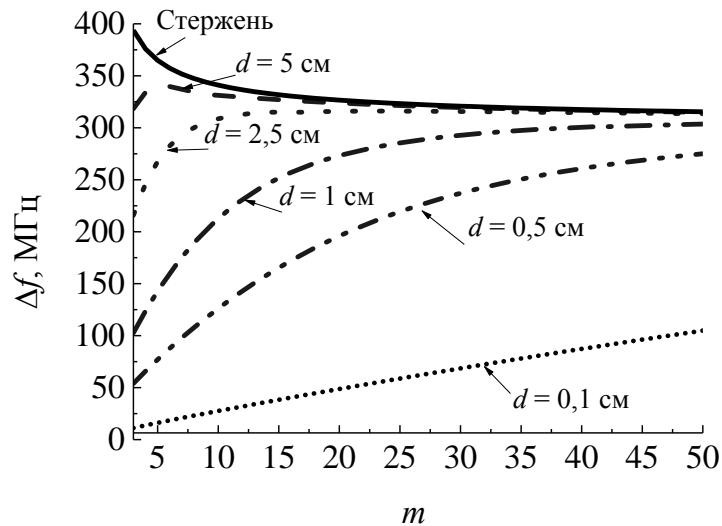


Рис. 2. Зависимость области свободной дисперсии от азимутального индекса при различных значениях толщины дискового резонатора для  $HE_{m1n}$  колебаний.

Работа поддержана Российским Научным Фондом (грант №16-12-10440).

#### Библиографический список

1. Capmany J., Novak D., Microwave photonics com-bines two worlds // Nature Photon. – 2007. – V.1. – P. 319-330.
2. Yao J., Microwave Photonics // J. Lightwave Technol. – 2009. – V.27. – P. 314-335.
3. Marpaung D., Roeloffzen C., et al., Integrated microwave photonics // Lasers Photon. Rev. – 2013. V.7. – P. 506-538.
4. Ильченко М. и др. Диэлектрические резонаторы. – РиС, 1989.
5. Городецкий М. Л. Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью // Москва: Физматлит. – 2011. – С
6. Knox R. M. Dielectric waveguide microwave integrated circuits-an overview //IEEE Transactions on Microwave Theory Techniques. – 1976. – Т. 24. – С. 806-814.
7. Цибизов К.Н., Борисов С. А., Безбородов Ю. М. // Зарубеж. радиоэлектрон. 1981. №11. С.21.