

*Быков А.Г., Лосев Д.В., Бардашов Д.С.
Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Распространение волны в среде с нелинейной характеристикой полупроводникового диода

Рассматривается задача распространения плоской волны с произвольной временной зависимостью в безграничной нелинейной среде. Решение этой задачи позволяет выявить общие закономерности преобразования формы волны и ее спектрального состава в зависимости от формы исходного сигнала и вида нелинейной характеристики. Предложенный подход, в отличие от классического, не приводит к неограниченному возрастанию амплитуды волны при больших значениях временной и пространственных переменных.

Ключевые слова: нелинейные среды, распространение волн, метод вариации параметров.

Введение

С развитием технических возможностей по созданию генераторов высокоомощного и сверхширокополосного излучения (в частности, лазеров в оптике) становятся все более актуальными задачи описания распространения излучения в сплошной нелинейной среде. Среди них выделим проблему использования нелинейных эффектов, возникающих при взаимодействии излучения с биологическими тканями, для своевременной диагностики различных заболеваний [1].

В последнее время для целей медицинской диагностики начинает использоваться терагерцовый диапазон волн. Его привлекательность вызвана возможностью исследования вращательных спектров различных органических молекул [2]. Для нелинейного преобразования частоты излучения предпринимаются попытки использования сосредоточенных нелинейных элементов [3-4], однако ввиду малого вклада одиночной нелинейности в энергетику сигнала это направление сталкивается с существенными трудностями. Одним из способов их преодоления является использование протяженных нелинейных сред, в которых происходит накопление нелинейных эффектов, в результате чего возможно более гибкое управление формой и другими характеристиками сигнала.

Часто применяемый при исследовании нелинейных сред метод малых возмущений приводит к неограниченному возрастанию получаемой зависимости при увеличении временной и пространственных переменных [5]. Кроме того, существующие подходы базируются на решении однородных уравнений, т.е. описанием возможных типов волн. Реализуемые же процессы адекватно описываются лишь неоднородными уравнениями с заданным источником. В данной работе делается попытка построения методов, свободных от указанных ограничений, на примере задачи о распространении излучения одномерного точечного источника с произвольной временной зависимостью в нелинейной среде.

1. Метод вариации параметров

Будем исходить из одномерного волнового уравнения в скалярном приближении

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi(t)\delta(x) + \gamma_1 \frac{\partial^2 f(u)}{\partial t^2} + \gamma_2 \frac{\partial g(u)}{\partial t}, \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ описывает временную форму сигнала, v – фазовая скорость в фоновой линейной среде, функции $f(u)$ и $g(u)$ описывают нелинейные свойства фазовой скорости и коэффициента поглощения среды, γ_1 и γ_2 – малые числовые параметры, характеризующие вклад нелинейных характеристик. Будем считать среду безграничной, а начальные условия однородными.

Применим к решению этой проблемы метод вариации параметров [6]. В качестве исходной формы выберем решение невозмущенного уравнения (1) при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$

$$u_0(x, t) = -\frac{v}{2} \Phi(t - |x|/v) \chi(t - |x|/v), \quad (2)$$

где $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$, $\chi(t)$ – функция Хевисайда.

Будем варьировать амплитуду и время запаздывания сигнала (2) и введем в рассмотрение дополнительную аддитивную поправку. В результате решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u(x, t) = -\frac{v}{2} [m(x, t)\Phi(\tau(x, t)) + s(x, t)] \chi(\tau(x, t)), \quad (3)$$

содержащем три подлежащих определению функции $m(x, t)$, $\tau(x, t)$ и $s(x, t)$, имеющие физический смысл коэффициента прохождения, запаздывания волны за счет изменения ее фазовой скорости нелинейной средой и рассеянной волны соответственно. Подчеркнем, что взаимосвязь между этими функциями в (3) в большой степени произвольна, но отражает основные представления об изменениях характеристик плоской волны при распространении в линейной неоднородной среде и надежды на адекватное описание процессов в нелинейной среде.

Требуемые условия для нахождения неизвестных функций $\tau(x, t)$, $m(x, t)$ и $s(x, t)$ получим, приравнявая коэффициенты при $\delta'(\tau(x, t))$, $\delta(\tau(x, t))$ и $\chi(\tau(x, t))$ в левой и правой частях уравнения (1) после подстановки в него зависимости (3) и всех необходимых производных.

Для определения функции $\tau(x, t)$ имеем уравнение [6]

$$\tau_x^2 - \frac{1}{v^2} \tau_t^2 = \gamma_1 F \left(-\frac{v}{2} [m\Phi + s] \right) \tau_t^2,$$

где $F(x) = f(x)/x$. Здесь для упрощения выражений у функций $\Phi(\tau(x, t))$, $\varphi(\tau(x, t))$, $m(x, t)$, $s(x, t)$, $\tau(x, t)$ опущены аргументы и использованы нижние индексы для обозначения соответствующих производных, например, $\tau_x \equiv \partial\tau/\partial x$. В приближении неучета взаимного влияния неизвестных функций

$$\tau(x, t) \approx t - \frac{|x|}{v} \sqrt{1 + \gamma_1 v^2 F \left(-\frac{v}{2} \Phi \left(t - \frac{|x|}{v} \right) \right)}. \quad (4)$$

Для нахождения функции $m(x, t)$ приравняем в уравнении (1) коэффициенты при $\delta(\tau(x, t))$ учетом соотношения (4). При этом предположим по аналогии с линейным случаем, что рассеянное назад поле будет мало вследствие малости контраста эквивалентного показателя преломления нелинейной среды, что позволяет принять

функцию $s(x,t)=0$. Также будем удерживать в уравнении только линейные по параметрам γ_1 и γ_2 члены. В результате уравнение для $m(x,t)$ принимает вид [6]

$$m_x + \frac{m_t}{v} = \frac{\gamma_1 v}{2Q\Phi} \left(F\left(-\frac{v}{2}\Phi\right) - f'\left(-\frac{v}{2}\Phi\right) \right) + \frac{\gamma_2}{\Phi} g\left(-\frac{v}{2}\Phi\right),$$

где у функций φ, Φ опущен аргумент $t - |x|/v$, нелинейные характеристики f, F, g зависят от аргумента $-\frac{v}{2}\Phi\left(t - \frac{|x|}{v}\right)$, «штрих» обозначает производную по всему

аргументу, $Q = 1 - \frac{\gamma_1 |x| v^2 F' \cdot \varphi}{4\sqrt{1 + \gamma_1 v^2 F}}$. Решением этого уравнения является функция

$$m(x,t) = 1 + \frac{|x|}{\sqrt{1 + \gamma_1 v^2 F}} \left\{ \frac{\gamma_2 g}{\Phi} + \frac{\gamma_1 v \varphi}{2\Phi Q} (F - f') \right\}. \quad (5)$$

Учтем, что в процессе решения мы ограничивались только линейными членами по параметрам γ_1 и γ_2 , и, поскольку $1 + z \approx e^z$, можем записать решение в эквивалентной форме

$$m(x,t) = \exp\left(\frac{\gamma_2 g |x|}{\Phi \sqrt{1 + \gamma_1 v^2 F}}\right) \exp\left[\frac{|x|}{2\Phi} \frac{\gamma_1 v \varphi (F - f')}{\left(\sqrt{1 + \gamma_1 v^2 F} - \frac{\gamma_1 |x| v^2 F' \cdot \varphi}{4}\right)}\right]. \quad (6)$$

Отметим, что, подобно случаю линейной среды, имеет место ослабление волны за счет функции нелинейного поглощения $g(-v\Phi(\tau)/2)$ (при $\gamma_2 = 0$ оно отсутствует), хотя на величину ослабления также оказывают влияние нелинейные свойства фазовой скорости, представленные функцией $F(-v\Phi(\tau)/2)$.

Приравнивая коэффициенты при $\chi(\tau(x,t))$ в уравнении (1) с учетом найденных приближенно функций $\tau(x,t)$ и $m(x,t)$ и, пренебрегая малыми слагаемыми, получаем уравнение для нахождения функции $s(x,t)$ [6]

$$s_{xx} - \frac{s_{tt}}{v^2} + \frac{2\varphi}{\Phi v} \left(s_x + \frac{1}{v} s_t \right) = 2\gamma_1 \left(\frac{\varphi^2}{\Phi} - \varphi' \right) (F - f') - \gamma_2 \varphi (G - g'),$$

где $G(z) = g(z)/z$.

Его решение имеет вид $s(x,t) = w(x,t)\Phi(\tau)$, где

$$w(x,t) = -\frac{v}{2} \int_0^t dt_1 \int_{x-v(t-t_1)}^{x+v(t-t_1)} dx_1 \left\{ 2\gamma_1 \left(\frac{\varphi}{\Phi} \right)' (f' - F) + \gamma_2 \frac{\varphi}{\Phi} (g' - G) \right\},$$

и описывает процесс рассеяния волны неоднородностями, возникающими при прохождении волной нелинейной среды, а функция $w(x,t)$ имеет смысл коэффициента рассеяния (отражения) – отношения рассеянного поля к падающему $\Phi(\tau)$.

2. Численное моделирование и анализ результатов

На основе полученных соотношений было проведено численное моделирование искажения волны в нелинейной среде на основе соотношения (3) при учете функции

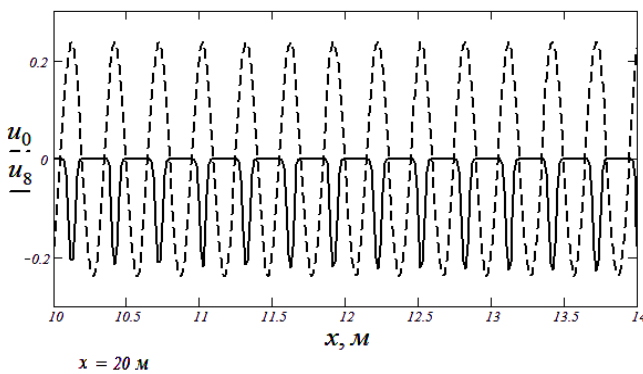
$\tau(x,t)$, найденной по формуле (4), функции $m(x,t)$, вычисленной по формуле (6), и при $s(x,t)=0$. Для примера на рисунках 1, 2 представлена в зависимости от расстояния от источника форма волны, преобразованной нелинейностью с характеристиками выпрямительного диода

$$f(x) = S \sqrt{\frac{2q\epsilon\epsilon_0 N_a N_d (u_k - x)}{(N_a - N_d)}}, \quad g(x) = I_0 \left(e^{\beta x} - 1 \right),$$

в котором параметры $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, $\epsilon = 12$, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$, $N_a = 4 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$, $N_d = 4 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$, $u_k = 0.391 \text{ В}$, $S = 10^{-6} \text{ м}^2$, $\beta = \frac{1}{\phi}$, $\phi = 0.026 \text{ В}$, $I_0 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ А}$

соответствуют характеристикам диода GD402A. Отображены следующие величины: u_0 – плоская волна при отсутствии нелинейности в среде, вычисляемая по формуле (2), u_8 – восьмая итерация сигнала, а также спектр сигнала u_8 . При этом рис. 1 соответствует гармоническому сигналу $\varphi(t) = A \cos \omega t$, $\omega = 2\pi f$, $f = 1 \text{ ГГц}$, $A = 0.25$, рис. 2 – гауссовскому импульсу $\varphi(t) = A e^{-(t/t_0)^2} \sin \omega t$, где величины $t_0 = 3 \text{ нс}$, $f = 1 \text{ ГГц}$, $A = 10$ характеризуют длительность, частоту заполнения и амплитуду импульса соответственно.

Представленные рисунки демонстрируют хорошо известный эффект выпрямления сигнала при прохождении полупроводникового контакта. Однако необходимо иметь в виду, что для широкополосного сигнала нелинейная характеристика диода будет иметь другой, более сложный вид [7], при этом эффект выпрямления отсутствует. Спектр содержит все кратные гармоники. В этом проявляется совместное действие эквивалентной нелинейной емкости, выступающей как фильтр нижних частот, и экспоненциальной характеристики проводимости диода, которую можно интерпретировать как полином бесконечного порядка. Также отметим малую изменчивость спектра с расстоянием, что связано с конечной временной протяженностью импульса. Отметим, что, в отличие от



$x = 20 \text{ м}$

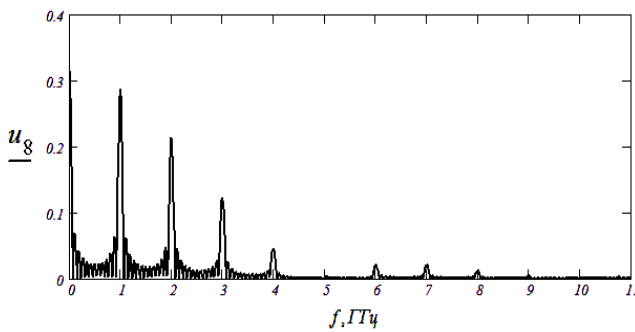
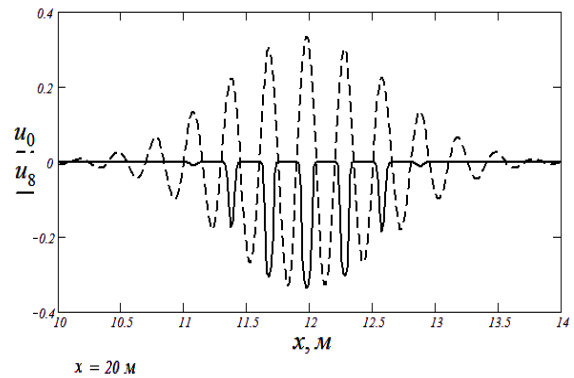


Рис. 1.



$x = 20 \text{ м}$

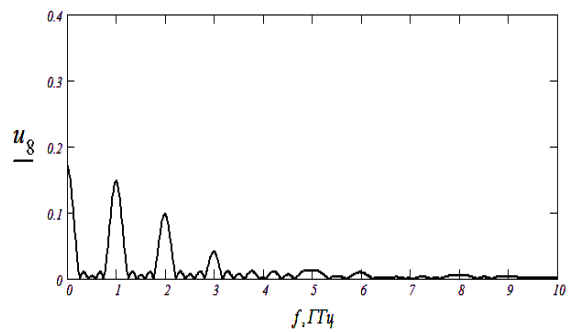


Рис. 2.

случая квадратичной нелинейной среды [6], сигнал практически не меняет свою форму в зависимости от расстояния. Этот эффект объясняется тем, что при значениях сигнала, превышающих контактную разность потенциалов U_k , область пространственного заряда в полупроводниковом р-п переходе фактически перестает существовать, и, следовательно, нелинейная диэлектрическая проницаемость обращается в нуль, поэтому развитие нелинейного искажения формы сигнала при распространении волны не происходит. Имеет место своеобразное «клиппирование» сигнала.

Заключение

Предложенное решение задачи позволяет выявить общие закономерности преобразования формы волны в нелинейной среде в зависимости от формы исходного сигнала и вида нелинейной характеристики. Используемую для решения процедуру можно рассматривать как перенос методов нелинейной геометрической оптики [5] из спектральной во временную область.

Также можно отметить наличие в нелинейной среде ослабления/усиления волны даже при отсутствии у среды проводимости, что позволяет говорить об эквивалентной проводимости (переменного знака) нелинейной среды. Упоминание такого эффекта в литературе не обнаружено.

Таким образом, строгое математическое рассмотрение даже простейшей задачи выявило новые эффекты и показало, что некритичный перенос методов, разработанных для линейных сред и сосредоточенных нелинейных элементов, которые составляют основу существующего подхода к проблеме, может привести к значительному искажению при описании эффектов распространения волн в нелинейных средах.

Библиографический список

1. Нелинейные электромагнитные волны / Под ред. П.Усленги. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
2. Вакс В. Л., Анфертьев В. А., Гольцман Г. Н., Пентин И. В., Третьяков И. В. ТГц спектрометр высокого разрешения на основе наноструктурированных полупроводниковых и сверхпроводниковых устройств // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал), № 1, 2016.
3. Якубов В.П., Лосев Д.В., Мальцев А.И. Диагностика нелинейностей по возмущениям рассеянного поля // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 2000. Т. 43. № 7. – С. 645-651.
4. Быков А.Г., Лосев Д.В., Бардашов Д.С. Рассеяние волн нелинейным объектом // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58. № 10-3. – С. 9-11.
5. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 384 с.
6. Лосев Д.В., Бардашов Д.С., Быков А.Г. Метод вариации параметров в задаче распространения волн в нелинейных средах // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал), № 2, 2017.
7. Быков А.Г., Лосев Д.В., Бардашов Д.С. Возбуждение полупроводникового диода коротким импульсом // Известия Вузов. Физика, 2015, Т. 58, № 8-2. – С. 147-150.