И.А. Балыко
АО «Научно-производственное предприятие «Исток» им. Шокина»

Кратковременная нестабильность фазы сигнала

Вопросы количественного описания нестабильности частоты и фазы высокостабильных генераторов имеют важное значение при разработке радиоэлектронных систем [1-3]. В настоящей работе кратковременная нестабильность фазы рассматривается как стационарный, в широком смысле, случайный процесс. Подобный подход справедлив для большинства практических приложений, особенно, касающихся исследования генераторов СВЧ.

Выходной сигнал идеального источника колебаний можно моделировать чисто синусоидальным напряжением (или током). $V(t)=V_0\sin(2\pi\nu_0 t)$, где V_0 и ν_0 - номинальные значения амплитуды и частоты. Для реальных источников модель должна учитывать отклонения амплитуды и частоты от V_0 и ν_0. В настоящей работе рассматриваются только случайные флюктуации фазы φ(t), что дает нам право записать с учетом этих флюктуаций выражение для сигнала в виде $V(t)=V_0\sin[2\pi\nu_0 t+\varphi(t)]$. Функция φ(t) описывает случайный процесс, который в дальнейшем будем считать стационарным в широком смысле. Помимо временного описания процессов в математике используется их спектральное представление. Если процесс φ(t) стационарный и эргодический, то спектральная плотность флюктуаций фазы $S_\varphi(\omega)$ определяется как преобразование Фурье корреляционной функции фазы $B_\varphi(\tau) = \langle\varphi(t)\,\varphi(t-\tau)\rangle$, где через $\langle...\rangle$ обозначено среднее значение величины в скобках, τ – промежуток времени, $\omega=2\pi\nu$. $S_\varphi(\omega)=2\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_\varphi(\theta)\,e^{-j\omega\theta}\,d\theta$. Основываясь на теории случайных процессов, обычно считают $S_\nu(\omega)=S_\varphi(\omega)\dfrac{\omega^2}{4\pi^2}$. Важно отметить, что это соотношение выполняется не всегда, а лишь при условиях дифференцируемости φ (t) [2, 3]. Необходимым и достаточным условием дифференцируемости в среднеквадратическом стационарного случайного процесса φ(t) является конечная величина интеграла $I_\nu=\int\limits_0^{\infty}\omega^2 S_\varphi(\omega)d\omega$. Это означает, что S_φ (ω) на высоких частотах должна убывать быстрее, чем $\omega^{-2-\alpha}$ ($\alpha>0$) .В практических приложениях S_φ генераторов СВЧ на частотах анализа выше 10-20 кГц слабо изменяется с частотой, а потому интеграл (6) для таких сигналов не имеет конечной величины.

Корреляционная функция $B_\varphi(\tau)$ связана с $S_\varphi(\omega)$ обратным преобразованием Фурье

$$B_\varphi(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}S_\varphi(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega. \qquad (1)$$

Пусть среднее значение φ(t) равно нулю, тогда дисперсия определяется из соотношения [3]: $\sigma_\varphi^2=B_\varphi(0)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}S_\varphi(\omega)d\omega$. Из формулы следует, что величина дисперсии будет зависеть от верхней границы частоты анализа, поскольку в реальных генераторах приходится ограничивать протяженность частотного диапазона. Кроме того, для фазового фликкер –

шума функция $S_\varphi(\omega)$ возрастает, как $1/\omega$, что тоже приводит к росту σ_φ^2. Поэтому, σ_φ^2 не может являться информативной характеристикой нестабильности фазы сигнала генератора. Рассмотрим другие характеристики в определенной степени свободные от этих недостатков.

Рассмотрим простейшее действие над случайным процессом - разность между функцией φ (t) и функцией φ (t + $T_и$), сдвинутой по времени на интервал длительностью $T_и$, которое носит название набег фазы за время $T_и$ $\Delta\varphi(t) = \varphi(t + T_и) - \varphi(t)$. Поскольку φ (t) является случайным процессом, то и $\Delta\,\varphi(t)$ также будет случайным процессом, причем спектральная плотность процесса $\Delta\varphi(t)$ связана с $S_\varphi(\omega)$ соотношением [3]

$$S_{\Delta\varphi}(\omega) = 4\sin^2\left(\frac{\omega T_и}{2}\right) S_\varphi(\omega). \tag{2}$$

Эта же формула легко получается с помощью метода переходных функций, описанного в [2]. Выражение (2) можно представить, как преобразование $\varphi(t)$ в линейном фильтре с переходной функцией $h_1(t) = \delta(t + T_и) - \delta(t)$, где $\delta(t)$ – дельта-функция.

Процесс $\Delta\,\varphi$ (t) на выходе фильтра имеет вид

$$\Delta\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t - \theta)\varphi(\theta)\,d\theta. \tag{3}$$

Спектральные плотности в (3) связаны соотношением $S_{\Delta\varphi}(\omega) = |H_1(j\omega)|^2 S_\varphi(\omega)$, где $H_1(j\omega)$ – частотная передаточная функция фильтра. $|H_1(j\omega)|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\omega T_и}{2}\right)$.

Таким образом, дисперсия набега фазы равна

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} 4\sin^2\left(\frac{\omega T_и}{2}\right) S_\varphi(\omega)\,d\omega. \tag{4}$$

Как и в случае σ_φ^2 (8), величина дисперсии остается неопределенной и зависящей от верхней частоты анализа. В то же время, исчезло неограниченное возрастание подынтегральной функции при стремлении ω к 0, по крайней мере, для тех функций $S_\varphi(\omega)$, которые возрастают не быстрее, чем ω^{-2}.

Мгновенное значение фазы $\varphi(t)$ недоступно для наблюдения, так как любой метод измерения фазы обязательно связан с конечным интервалом времени. Одна характеристика с использованием этого интервала – набег фазы – бала рассмотрена. Однако выбор набега фазы в качестве характеристики для определения нестабильности фазы оказался не совсем удачным, так как не снял всех вопросов сходимости для величины дисперсии. Рассмотрим другую характеристику – среднее значение случайного процесса на временном интервале длительностью T

$$\varphi_c(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \varphi(\theta)\,d\theta, \tag{5}$$

которую, как и в предыдущем случае, можно представить в виде $\varphi_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t - \theta)\varphi(\theta)\,d\theta$.

Квадрат модуля частотной передаточной функции равен квадрату синуса к аргументу. В этом случае дисперсия среднего значения фазы определяется из выражения:

$$\sigma_{\varphi c}^{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^{2}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^{2}}\;S_{\varphi}(\omega)d\omega. \qquad (6)$$

Видно, что величина $\sigma_{\varphi c}^2$ существует даже в случае белой фазы, то есть когда $S_\varphi(\omega)$ = const. В то же время, в области малых частот резко падающая функция $S_\varphi(\omega)$ уже не ограничивается ростом частоты. Таким образом, и выражение (6) не может служить однозначной характеристикой для нестабильности частоты. Однако предыдущие расчеты показывают, что такую характеристику можно найти, если, например, совместить расчеты, приведенные выше.

Набег среднего значения фазы сигнала на временном промежутке наблюдения $T_н$ определим формулой $\Delta\varphi_c(t)=\varphi_c(t+T_н)-\varphi_c(t)$, где функция φ (t) преобразуется через два фильтра. Общая частотная передаточная функция $H_3(j\omega)$ равна произведению передаточных функций отдельных фильтров. Если время наблюдения $T_н$ равно времени усреднения T, то окончательно получаем выражение для дисперсии набега среднего значения фазы

$$\sigma_{\Delta\varphi c}^{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}4\frac{\sin^{4}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^{2}}S_{\varphi}(\omega)d\omega\;. \qquad (7)$$

Формула (7) по виду совпадает с дисперсией набега среднего значения частоты $\sigma_{\Delta\nu}^2$, которую еще показывают дисперсией Аллена [1]: Различие состоит лишь в величине коэффициента в подинтегральном выражении. Интеграл (7) сходится при белой фазе, однако в том случае, когда $S_\varphi(\omega)$ изменяется как ω^{-3}, интеграл (7) расходится.

Для устранения этого ограничения, которое не позволяет использовать формулу (7) для расчета нестабильности фазы сигнала генератора при произвольных зависимостях $S_\varphi(\omega)$, воспользуемся методикой оценок, описанной в [1] применительно к частотным шумам. Определим среднее значение фазы (5) в фиксированные моменты времени t_k.

$$\varphi_{kc}=\varphi_{c}(t_k)=\frac{1}{T}\int_{t_k}^{t_k+T}\varphi(\theta)d\theta \qquad k=1,2\cdots \qquad (8)$$

Рассмотрим сначала двухвыборочную дисперсию. Для этого выберем два значения φ_{1c} и φ_{2c}, разнесенные по времени на величину $T_и$ ($t_2=t_1+T_и$), где t_1 выбрана произвольно.

Оценка двухвыборочного среднего равна $\varphi_{c2}=0{,}5(\varphi_{1c}+\varphi_{2c})$. Оценка дисперсии определяется известным из статистической теории соотношением:

$$\sigma_{c2}^{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\varphi_{ic}-\varphi_{c2}\right)^{2}=\frac{1}{4}\left(\varphi_{1c}-\varphi_{2c}\right)^{2}. \qquad (9)$$

Поскольку каждая из φ_{1c} и φ_{2c} случайные величины, то и σ_{c2}^2 – случайная величина. Считая, что математическое ожидание $M[\varphi_{kc}] = 0$, значения φ_{1c} и φ_{2c} статистически независимы, а $M[\varphi_{1c}^2] = M[\varphi_{2c}^2]= \sigma^2$, из (9) находим $M\left[\sigma_{c2}^{2}\right]=\frac{1}{2}\sigma^{2}$.

Таким образом, оценка σ_{c2}^2 в формуле (9) является несмещенной. Для того, чтобы выполнялось условие смещенности необходимо вместо (9) взять оценку квадрата дисперсии в виде $\sigma_{c2}^2 = \frac{1}{2}\left(\varphi_{1c} - \varphi_{2c}\right)^2$. Отсюда

$$\sigma_{c2} = \frac{1}{\sqrt{2T}}\left\{-\int_{t_1}^{t_1+T}\varphi(\theta)d\theta + \int_{t_2}^{t_2+T}\varphi(\theta)d\theta\right\} \tag{10}$$

Используя методику переходных функций, для формулы (10) можно записать выражение для $h_{c2}(\theta)$. После получения частотной характеристики линейной системы с такой переходной функцией, находим двухвыборочную дисперсию:

$$\sigma_{c2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 2\frac{\sin^4\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2} S_\varphi(\omega)d\omega\ . \tag{11}$$

Интеграл (11) сходится при белой фазе (S_φ = const), однако он расходится при расчете нестабильности фазы, когда рассматривается функция S_φ (ω) ~ ω^{-3}. Устранить это ограничение можно, рассматривая трехвыборочную дисперсию. Возьмем три значения средней фазы: φ_{1c}, φ_{2c} и φ_{3c} и аналогичным образом построим оценку среднего $\varphi_{c3} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\varphi_{ic}$. Оценка дисперсии в виде $\sigma_{c3}^2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\left(\varphi_{ic} - \varphi_{c3}\right)^2$. является не совсем удобной для вычисления нестабильности фазы. Другим возможным вариантом является оценка в виде [1] $\sigma_{c3}^2 = \frac{1}{6}\left(\varphi_{1c} + \varphi_{3c} - 2\varphi_{2c}\right)^2$, где коэффициент 1/6 выбран для выполнения условия смещенности оценки. Из формулы следует, что при $T_н = T$

$$\sigma_{c3} = \frac{1}{\sqrt{6T}}\left[\int_{t_1}^{t_1+T}\varphi(\theta)d\theta - 2\int_{t_1+T}^{t_1+2T}\varphi(\theta)d\theta + \int_{t_1+2T}^{t_1+3T}\varphi(\theta)d\theta\right]$$

Переходная функция в этом случае имеет громоздкий вид и поэтому не приводится, а частотная характеристика фильтра определяется формулой

$$\left|H_{c3}(j\omega)\right|^2 = \frac{8}{3}\ \frac{\sin^6\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}\ .$$

Таким образом, окончательно получаем выражение для квадрата дисперсии набега фазы при трехвыборочном отсчете

$$\sigma_{c3}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{8}{3}\cdot\frac{\sin^6\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}\ S_\varphi(\omega)d\omega\ . \tag{12}$$

Коэффициент A=8/3 был получен при условии смещенности оценки дисперсии. Если это условие несущественно, то A=16/9.

Из формулы (12) следуют два важных вывода:

1) Подынтегральное выражение стремится к конечному пределу при $\omega \to 0$ даже для тех сигналов, у которых $S_\varphi(\omega)$ изменяется как ω^{-4}.

2) Интеграл (12) сходится при «белой фазе», то есть когда $S_\varphi(\omega)$ = const, поскольку знаменатель в подынтегральном выражении с частотой уменьшается как ω^{-2}, а функции в числителе ограничены.

В таблице приведены выражения для нестабильности фазы при различных степенных функциях $S_\varphi(\omega) = S_n \nu^n$, где n = 0,-1,-2,-3,-4.

Таблица 1

n	$S_\varphi(\nu)$	$\sigma^2_{\Delta\varphi}$
0	S_0	$\frac{S_0}{2T}$
-1	$\frac{S_{-1}}{\nu}$	$\frac{8\ln 2 - 3\ln 3}{2} S_{-1}$
-2	$\frac{S_{-2}}{\nu^2}$	$\frac{\pi^2 T}{3} S_{-2}$
-3	$\frac{S_{-3}}{\nu^3}$	$\frac{27\ln 3 - 32\ln 2}{2} 3\pi^2 T^2 S_{-3}$
-4	$\frac{S_{-4}}{\nu^4}$	$\frac{22}{30}\pi^4 T^3 S_{-4}$

Проведен анализ различных подходов к расчету кратковременной нестабильности фазы сигнала генератора.

Широко использующаяся связь между спектрами частоты и фазы имеет место лишь в случае дифференцируемости в среднеквадратичном $\varphi(t)$, то есть когда $S_\varphi(\omega)$ снижается с частотой быстрее, чем ω^{-3}, поэтому формула Аллена не может использоваться при расчете кратковременной нестабильности фазы в практически важных случаях.

Получено основополагающее соотношение для оценки дисперсии набега средней величины фазы, позволяющее рассчитывать конечный результат при всех известных зависимостях $S_\varphi(\omega)$, не зависящее от граничной частоты анализа.

Библиографический список

1. Аллен Д. Статистические характеристики атомных стандартов частоты / ТИИЭР – 1966. –Т. 54. – N. 1. - С. 132 – 142.
2. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука. 1983.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. Советское радио. 1966.