И.Л. Шейнман
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

Волны на релятивистском электронном пучке в плотной магнитоактивной плазме

На основе полного электродинамического рассмотрения проанализированы волны на электронном пучке в плотной плазме в продольном магнитном поле. Определены инкременты неустойчивости пучка в зависимости от внешнего поля.

Ключевые слова: плазма, магнитоактивная плазма, электронный пучок

Задачи преобразования энергии сильноточного релятивистского электронного пучка в энергию электромагнитного излучения при прохождении его через электродинамическую систему, заполненную плотной плазмой, возникают в плазменной релятивистской СВЧ-электронике, где исследования направлены на создание мощных СВЧ-усилителей и генераторов [1, 2]. Плазменный волновод играет роль замедляющей системы, что обусловливает применение медленных волн в линейных ускорителях заряженных частиц [3-5], где требуется обеспечение соответствия между скоростями пучков и электромагнитных волн.

Исследование волн, возбуждающихся в системе "плазма – релятивистский пучок", проведено с использованием гидродинамического подхода. Рассмотренный метод не требует дополнительного определения диэлектрической проницаемости движущейся среды исходя из уравнений движения частиц, а также позволяет определить условия макроскопического равновесия заряженного пучка электронов как при взаимопроникновении пучка и плазменной среды, так и в отсутствии такого проникновения. В [6], [7] аналогичные задачи решались в рамках электростатического приближения.

Гидродинамическое описание холодной многокомпонентной заряженной плазмы [7] основывается на совместном решении уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E}_\Sigma = -(1/c)(\partial\mathbf{B}_\Sigma/\partial t); \\ \nabla\times\mathbf{H}_\Sigma = (1/c)(\partial\mathbf{D}_\Sigma/\partial t) + (4\pi/c)\sum\limits_j e_j n_{j\Sigma}\mathbf{v}_{j\Sigma}; \\ \nabla\mathbf{B}_\Sigma = 0; \\ \nabla\mathbf{D}_\Sigma = 4\pi\sum\limits_j n_{j\Sigma}e_j \end{cases} \tag{1}$$

и гидродинамики

$$\begin{cases} \left(\partial/\partial t + \mathbf{v}_{j\Sigma}\nabla\right)\mathbf{p}_{j\Sigma} = e_j\left[\mathbf{E}_\Sigma + (1/c)\mathbf{v}_{j\Sigma}\times\mathbf{B}_\Sigma\right]; \\ \partial n_{j\Sigma}/\partial t + \nabla\left(n_{j\Sigma}\mathbf{v}_{j\Sigma}\right) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathbf{E}_\Sigma$, $\mathbf{H}_\Sigma$ – напряженности электрического и магнитного полей соответственно; c – скорость света; $\mathbf{D}_\Sigma$, $\mathbf{B}_\Sigma$ – индукции электрического и магнитного полей соответственно; e_j, $n_{j\Sigma}$, $\mathbf{v}_{j\Sigma}$ – заряд, концентрация и скорость j-го компонента плазмы соответственно;

$\mathbf{p}_{j\Sigma} = m_j \gamma_{j\Sigma} \mathbf{v}_{j\Sigma}$ – j-го компонента плазмы, причем m_j – масса частицы этого компонента, $\gamma_{j\Sigma} = 1\Big/\sqrt{1-\left|\mathbf{v}_{j\Sigma}\right|^2/c^2}$ – его релятивистский фактор.

Системы уравнений Максвелла и гидродинамики (1), (2) необходимо дополнить материальными соотношениями: $\mathbf{B}_\Sigma = \mathbf{H}_\Sigma$; $\mathbf{D}_\Sigma = \mathbf{E}_\Sigma$.

Рассмотрим релятивистский пучок электронов в неподвижной плазменной среде с равновесной концентрацией частиц n_1. Будем считать, что пучок представляет собой цилиндр радиуса R, содержащий движущиеся вдоль его оси (ось z) со скоростью $V_0 = \beta_0 c$ электроны пучка концентрацией n_0. Вдоль оси пучка приложено дополнительное внешнее фокусирующее магнитное поле B_0. При $n_0 < n_1/(1+\beta_0)$ пучок частично вытесняет электроны плазмы, и фоновая плазма создает обратный ток, компенсирующий собственное магнитное поле пучка. В частном случае $\beta_0 \approx 1$ это условие имеет вид $n_0 < n_2/2$. В этом случае внутри цилиндрического пучка содержатся электроны плазмы с равновесной концентрацией n_2, движущиеся вдоль его оси со скоростью $V_2 = \beta_2 c$. При заданных скорости пучка и концентрациях частиц в пучке и внешней плазме условие равенства нулю всех производных по времени в уравнениях (1) и (2) позволяет определить равновесную концентрацию и скорость электронов плазмы внутри пучка:

$$\begin{cases} n_2 = n_0 - n_1; \\ \beta_2 = -n_0\beta_0 \big/ (n_1 - n_0). \end{cases}$$

Введя обозначения

$$k_{\mathrm{p}0}^2 = 4\pi e^2 n_0 \big/ (mc^2);\ k_{\mathrm{p}1}^2 = 4\pi e^2 n_1 \big/ (mc^2);\ k_{\mathrm{p}2}^2 = 4\pi e^2 n_2 \big/ (mc^2),$$

условия равновесия пучка получим в виде:

$$\begin{cases} k_{\mathrm{p}2}^2 = k_{\mathrm{p}1}^2 - k_{\mathrm{p}0}^2; \\ \beta_2 = -k_{\mathrm{p}0}^2 \beta_0 \big/ \left(k_{\mathrm{p}1}^2 - k_{\mathrm{p}0}^2\right). \end{cases}$$

Решая совместно системы уравнений Максвелла (1) и гидродинамики (2), получим уравнения для продольных компонент векторов **H** и **E** внутри пучка:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}H_z\right) - \frac{\nu^2}{r^2}H_z - T_{H2}^2 H_z = -i\varepsilon_{P2} P_2 E_z \quad (3)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}E_z\right) - \frac{\nu^2}{r^2}E_z - T_{E2}^2 E_z = iP_2 H_z \quad (4)$$

где $$T_{H2}^2 = T_{02}^2 + \frac{k_c^2}{\varepsilon_{\perp 2}}\left(\frac{L_0^2}{\gamma_0^2} + \frac{L_2^2}{\gamma_2^2} + 2L_0L_2(1-\beta_0\beta_2) + L_0L_2\gamma_0\gamma_2(\beta_0-\beta_2)^2\left(\frac{L_0}{\gamma_0} + \frac{L_2}{\gamma_2}\right)\right),$$

$$T_{E2}^2 = \frac{T_{02}^2\varepsilon_{P2}}{\varepsilon_{\perp 2}},\quad P_2 = \frac{k_c k^*}{\varepsilon_{\perp 2}},\quad \varepsilon_{P2} = 1 - \frac{k_{p0}^2}{\gamma_0^3 k_{*0}^2} - \frac{k_{p2}^2}{\gamma_2^3 k_{*2}^2},\quad \varepsilon_{\perp 2} = 1 - \frac{L_0}{\gamma_0} - \frac{L_2}{\gamma_2} - L_0L_2\gamma_0\gamma_2(\beta_0-\beta_2)^2,$$

$$T_{02}^2 = k_z^2 - k^2 + L_0\gamma_0 k_{*0}^2 + L_2\gamma_2 k_{*2}^2, \qquad k^* = L_0 k_0^* + L_2 k_2^* - L_0L_2(\beta_0-\beta_2)(\gamma_0 k_{*0} - \gamma_2 k_{*2}),$$

$k_0^* = k_z - k\beta_0$, $\quad k_2^* = k_z - k\beta_2$, $\quad \gamma_0 = (1-\beta_0^2)^{-1/2}$, $\quad \gamma_2 = (1-\beta_2^2)^{-1/2}$, $\quad k_{*0} = k - \beta_0 k_z$,

$k_{*2} = k - \beta_2 k_z$, $L_0 = \dfrac{k_{p0}^2}{k_{*0}^2\gamma_0^2 - k_c^2}$, $L_2 = \dfrac{k_{p0}^2}{k_{*2}^2\gamma_2^2 - k_c^2}$, $k_{p0} = \dfrac{\omega_{p0}}{c}$, ${\omega_{p0}}^2 = \dfrac{4\pi e^2 n_0}{m}$, $k_{p2} = \dfrac{\omega_{p2}}{c}$,

$\omega_{p2}^2 = \dfrac{4\pi e^2 n_2}{m}$, $k_c = \dfrac{\omega_c}{c}$, $\omega_c = \dfrac{eB_0}{mc}$ – циклотронная частота, $k = \dfrac{\omega}{c}$.

При $P_2 = 0$ (3), (4) распадаются на два независимых уравнения относительно E_z и H_z, решением которых является пара вида: $E_z^{(2)} = a_2 I_v(T_{E2}r)$, $H_z^{(2)} = b_2 I_v(T_{H2}r)$

.

В невырожденном случае $P_2 \neq 0$:

$$E_z^{(2)} = a_{21} I_v(T_{21}r) + a_{22} I_v(T_{22}r), \qquad (5)$$

$$H_z^{(2)} = -i\left[a_{21}\varphi_{21} I_v(T_{21}r) + a_{22}\varphi_{22} I_v(T_{22}r)\right], \qquad (6)$$

где $T_{2[1.2]}^2 = \dfrac{1}{2}\left(T_{H2}^2 + T_{E2}^2 \pm \sqrt{(T_{H2}^2 - T_{E2}^2)^2 + 4\varepsilon_{P2}P_2^2}\right)$, $\varphi_{2j} = (T_{2j}^2 - T_{E2}^2)/P_2$.

В случае неподвижной внешней среды в (3), (4) следует положить $\beta_0 = \beta_2 = 0$, $L_2 = 0$ и произвести замену L_0 на $L_1 = \dfrac{k_{p1}^2}{k^2 - k_c^2}$. Тогда $T_{1H}^2 = T_{01}^2 + \dfrac{L_1^2 k_c^2}{\varepsilon_{\perp 1}}$, $T_{1E}^2 = \dfrac{T_{01}^2 \varepsilon_{P1}}{\varepsilon_{\perp 1}}$, $P_1 = \dfrac{L_1 k_c k_z}{\varepsilon_{\perp 1}}$, $T_{01}^2 = k_z^2 - k^2\varepsilon_{\perp 1}$, $\varepsilon_{\parallel 1} = 1 - \dfrac{k_{p1}^2}{k^2}$, $\varepsilon_{\perp 1} = 1 - L_1$. При $P_0 = 0$ решением будет:

$$\begin{cases} E_z^{(1)} = a_1 K_v(T_{E1}r) \\ H_z^{(1)} = b_1 K_v(T_{H1}r) \end{cases}$$

где $K_\nu(x)$ – функция Макдональда. В невырожденном случае $P \neq 0$ получим:

$$E_z^{(1)} = a_{11} K_v(T_{11}r) + a_{12} K_v(T_{12}r),$$

$$H_z^{(1)} = -i\left(a_{11}\varphi_{11} K_v(T_{11}r) + a_{12}\varphi_{12} K_v(T_{12}r)\right),$$

где $T_{1[1,2]}^2 = \dfrac{1}{2}\left(T_{H1}^2 + T_{E1}^2 \pm \sqrt{(T_{H1}^2 - T_{E1}^2)^2 + 4\varepsilon_{P1}P_1^2}\right)$, $\varphi_{1j} = (T_{1j}^2 - T_{E2}^2)/P_1$.

Введем обозначения:

$$S_{2j} = \frac{kI_v'(T_{2j}R)}{T_{2j} I_v(T_{2j}R)}, \quad S_{1j} = \frac{kK_v'(T_{1j}R)}{T_{1j} K_v(T_{1j}R)},$$

$$Q_{Hj} = \frac{\nu}{kR}(\tau - \varphi_{2j}\zeta_*) + S_{2j}\varphi_{2j} - \varphi_{P1}\frac{S_{12}\varphi_{12} - S_{11}\varphi_{11}}{\varphi_{12} - \varphi_{11}} + \varphi_{11}\varphi_{12}\frac{S_{12} - S_{11}}{\varphi_{12} - \varphi_{11}},$$

$$Q_{Ej} = \frac{\nu}{kR}(\tau\varphi_{2j} - \zeta^*) + \varepsilon_{P2}S_{2j} - \varepsilon_{P1}\left(\varphi_{2j}\frac{S_{12} - S_{11}}{\varphi_{12} - \varphi_{11}} - \frac{S_{12}\varphi_{11} - S_{11}\varphi_{12}}{\varphi_{12} - \varphi_{11}}\right)$$

$$\tau = k\left(\frac{u_2^3}{w_2^4} - \frac{u_1^3}{w_1^4}\right), \zeta_* = k^2 k_c\left(\frac{L_0 k_{*0} + L_2 k_{*2}}{w_2^4} - \frac{kL_1}{w_1^4}\right),\ \zeta^* = kk_c\left(\frac{k\eta}{w_2^4} - \frac{k_z^2 L_1}{w_1^4}\right),$$

$$u_1^3 = T_{01}^2 k_z,\ u_2^3 = T_{02}^2 \tilde{k}_z + k_c^2 (L_0 k_{*0} + L_2 k_{*2})(L_0 \beta_0 + L_2 \beta_2),$$

$$\eta = \frac{L_0 k_0^{*2}}{k_{*0}} + \frac{L_2 k_2^{*2}}{k_{*2}} + \frac{L_0 L_2 (\beta_0 - \beta_2)^2}{k_{*0} k_{*2}}\left((k_{p0}^2 k_{*0} + k_{p2}^2 k_{*2}) - \frac{2k_0^* k_2^*}{(\beta_0 - \beta_2)}\left(\frac{\gamma_0 k_{*0}^2}{k_0^*} - \frac{\gamma_2 k_{*2}^2}{k_2^*}\right)\right),$$

$$w_2^4 = T_{02}^4 - (L_0 k_{*0} + L_2 k_{*2})^2 k_c^2,\ w_1^4 = T_{01}^4 - L_1^2 k^2 k_c^2.$$

В результате дисперсионное уравнение для поверхностных волн на релятивистском цилиндрическом пучке электронов в плазме будет иметь вид:

$$Q_{E2} Q_{H1} - Q_{E1} Q_{H2} = 0. \tag{7}$$

Полученное дисперсионное уравнение следует из точных решений системы уравнений Максвелла и гидродинамики при наличии однородного фокусирующего магнитного поля. В отсутствии поля оно сводится к дисперсионному уравнению на пучке в плотной плазме [8].

Условие $P_1 = P_2 = 0$ при $k_c \neq 0$ эквивалентно $k_z = k^* = 0$. Для пучка в плотной плазме получаем

$$\begin{cases} n_0 = n_1/2, \\ k_z = 0, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} k = k_p (\gamma_1 + \gamma_2)^{-1/2}, \\ k_z = 0. \end{cases}$$

Проанализируем устойчивость пучка электронов в плотной плазме вблизи резонанса с продольными колебаниями плотности заряда пучка: $k = k_0 + k_*$, $k_0 = \beta k_z$, при условии, что система помещена в достаточно сильное продольное магнитное поле, удовлетворяющее условиям $k_c >> k_{p0}^2$, $k_c >> k_{p1}^2$, $k_c >> k_{p2}^2$, $k_c >> k_{*0}\gamma$, $k_c >> k$. При этом дисперсионное уравнение (7) имеет вид:

$$\varepsilon_{P2} S_{22} - \varepsilon_{P1} S_{12} = -\frac{\nu}{k_0 R} \frac{k_{p0}^2 \beta_0^2}{k_c k_{*0}}. \tag{8}$$

Отметим, что структура полученного уравнения полностью аналогична структуре дисперсионного уравнения для магнитоактивного плазменного потока [9]. Однако, при рассмотрении плотной плазмы как правило выполняется условие $\varepsilon_{\square 1} = 1 - k_{p1}^2 / k^2 < 0$. При этом, считая $k_c k_{*0} >> 1$, правой частью уравнения (8) можно пренебречь, откуда получим:

$$\varepsilon_{P2} S_{2E} - \varepsilon_{P1} S_{1E} = 0$$

Его решение при $|k_{*0}| << k_0$ имеет вид:

$$k_{*0} = \frac{k_{p0}}{\gamma_0^{3/2}}\left(1 - \varepsilon_{1P}\left(\frac{H_\nu^{(1)\prime}(T_0 R\sqrt{-\varepsilon_{1P}})}{H_\nu^{(1)}(T_0 R\sqrt{-\varepsilon_{1P}})}\right)^2\right)^{-1/2}$$

где $T_0 = k_0/\beta\gamma$, что означает, что во внешней среде распространяются нарастающие по амплитуде уходящие от границы как аксиально-симметричная, так и аксиально-несимметричные волны.

Введение сильного продольного фокусирующего магнитного поля в систему пучок – плотная плазма приводит к тому, что инкременты поверхностных аксиально-несимметричных волн уменьшаются обратно пропорционально циклотронной частоте или индукции этого поля, что позволяет подавить высокомодовую неустойчивость пучка. Однако в этом случае может возникать неустойчивость, связанная с возбуждением во внешней среде нарастающих по амплитуде уходящих от границы объемных волн.

Библиографический список

1. Кондратенко А. Н., Куклин В. М. Основы плазменной электроники. М.: Энергоатомиздат, 1988. 320 с.
2. Экспериментальная релятивистская плазменная СВЧ-электроника. //Релятивистская плазменная СВЧ-электроника. М.: Наука, 1994. 192 с. (Тр. ИОФАН. Т. 45).
3. Plasma Particle Accelerators. John M. Dawson in Scientific American, Vol. 260, No. 3, pages 54-61; March 1989.
4. Plasma Accelerators at the Energy Frontier and on Tabletops. Chandrashekhar Joshi and Thomas Katsouleas in Physics Today, Vol. 56, No. 6; pages 47-53; June 2003.
5. Accelerator Physics: Electrons Hang Ten on Laser Wake. Thomas Katsouleas in Nature, Vol. 431, pages 515-516; September 30, 2004.
6. Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А., "Устойчивость сильноточных релятивистских пучков в плазме и проблема критических токов," УФН, Том 103, Выпуск 4, 1971. — с. 609-640.
7. Теория заряженной плазмы. / Пер. с англ. / Девидсон Р. — М.Мир, 1978.
8. И. Л. Шейнман. Поверхностные волны на релятивистском электронном пучке в плотной плазме. Известия Вузов России. Радиоэлектроника. № 4. 2013. С. 76-83.
9. Шейнман И. Л. Поверхностные волны на магнитоактивном плазменном потоке //Известия СПбГЭТУ. Сер. Физика, математика, химия. 2000, №1, С. 22–26.