А. В. Галдецкий
ОАО "НПП "Исток" им. Шокина"

Устранение сингулярностей в двумерной модели движения частиц в аксиально-симметричном поле

Предложена новая система цилиндрических координат, позволяющая исключить искусственные сингулярности из уравнений движения частиц и ускорить моделирование аксиально симметричных электронно-оптических систем.

Ключевые слова: теорема Буша, двумерная модель, аксиально-симметричное поле

Разработки современных вакуумных СВЧ приборов требуют значительного объема численного моделирования и оптимизации электронно-оптической системы и других узлов лампы. Для этого требуется некоторая иерархия моделей (и программ) начиная с быстрых (хотя менее точных) двумерных моделей и кончая точными трехмерными моделями. По этой причине для моделирования движения электронов в аксиально-симметричных полях широко используются двумерные программы. Они позволяют решать только 2 дифференциальных уравнения на каждую крупную частицу (трубку тока) (для ρ, z) вместо трех уравнений в декартовой системе:

$$\ddot{\rho} = \rho\dot{\varphi}^2 + F_\rho \qquad \ddot{z} = F_z \tag{1}$$

благодаря интегралу движения (теореме Буша)

$$\dot{\varphi} = \frac{e}{2\pi\rho^2 m}\left[\Phi(\rho, z) - \Phi(\rho_0, z_0)\right] \tag{1a}$$

где F_ρ, F_z – компоненты силы, действующей на частицу, $\Phi(\rho, z) = 2\pi\int_0^\rho B_z(\rho, z)\rho d\rho$ – магнитный поток через окружность радиуса ρ, а ρ_0, z_0 – соответствующие величины при старте частицы. Здесь рассмотрен нерелятивистский случай, обобщение на релятивистские пучки очевидно. Однако использование традиционных цилиндрических координат ρ, φ сталкивается с известной трудностью: в уравнениях возникает искусственная сингулярность при приближении частицы к оси $\rho \to 0$. Фактически это связано с тем, что в выражении $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ функция квадратного корня имеем сингулярность в нуле. Это приводит к ухудшению точности расчета, необходимости существенного уменьшения временных шагов и увеличению времени счета, возникновению артефактов в результатах. На Рис. 1 показаны такие сингулярности на примере движения частиц в однородном магнитном поле как вблизи, так и вдали от оси. Показаны траектории трех физически эквивалентных частиц, движущихся на азличных расстояниях от оси $\rho = 0$. Очевидно, что, несмотря на эту эквивалентность, их цилиндрические координаты изменяются по-разному, проходя через сингулярность при пересечении оси.

Данная проблема решалась усреднением сил, действующих на крупную частицу, по ее объему [1, 2].

Новые цилиндрические координаты

Вместо традиционных цилиндрических координат ρ, φ мы используем новые переменные:

$$u = \rho^2, \; w = \int \rho\dot{\varphi} dt \tag{2}$$

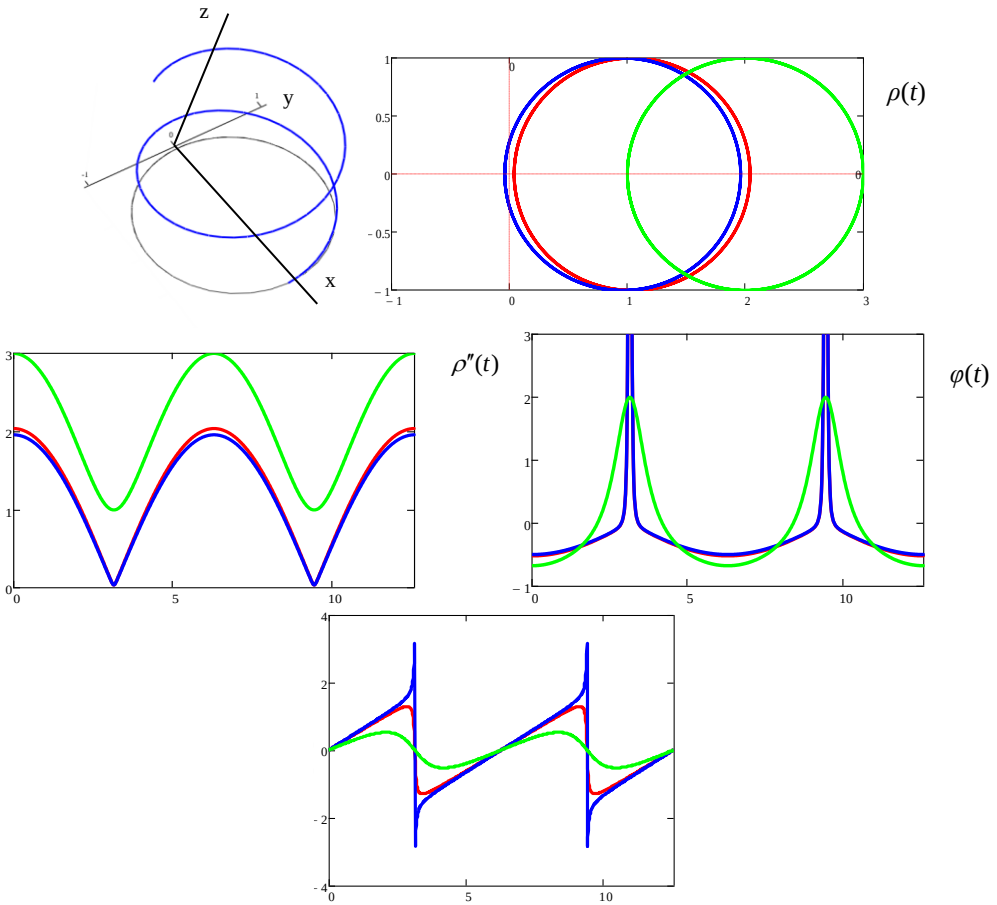

Рис 1. Траектория частицы в однородном магнитном поле (а); проекции на плоскость xy траекторий 3х частиц, проходящих вблизи начала координат (б); временные зависимости $\rho(t)$, ее производной $\rho''(t)$ и $\varphi(t)$ для этих частиц.

Для них уравнения движения:

$$\ddot{u} = \frac{\dot{u}^2}{2u} + 2\sqrt{u}F_\rho + 2\dot{w}^2 \qquad \ddot{w} = F_\varphi \qquad \ddot{z} = F_z \tag{3}$$

не имеют актуальных сингулярностей при $u = 0$ в отличие от (1а). С учетом теоремы Буша они сводятся к:

$$\ddot{u} = \frac{\dot{u}^2}{2u} + 2\sqrt{u}F_\rho + \frac{2}{u}\left[\rho_0^2\dot{\varphi}_0 + \frac{e}{2\pi mc}\left(\tilde{\Phi}(u,z) - \tilde{\Phi}(u_0,z_0)\right)\right]^2 \tag{4}$$

где $\tilde{\Phi}(u,z) = \Phi(\sqrt{u},z)$. Переменные $u(t)$, $w(t)$ меняются медленно и регулярно (Рис. 2), так что соответствующие уравнения могут решаться весьма эффективно.

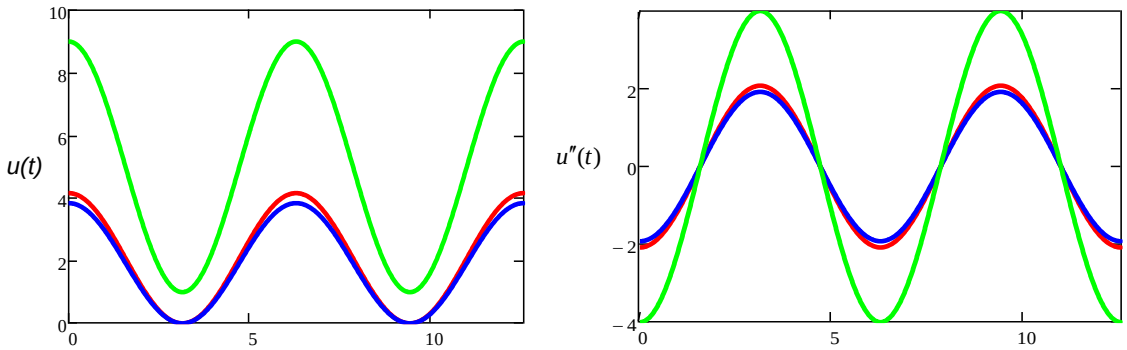

Рис 2. Зависимость $u(t)$, $u''(t)$ для частиц, проходящих вблизи от оси и вдали от нее.

Следует отметить, что в аксиально-симметричной системе вч поля имеют зависимость от радиуса вида $I_0(k_\perp r)$ и могут быть представлены в виде ряда по целым степеням u, что позволяет полностью отказаться от использования координат ρ, φ.

Приближение для слабопульсирующего потока

Описанный подход может быть использован при разработке двумерных программ для моделирования произвольных аксиально симметричных систем.

Рассмотрим важный частный случай фокусировки пучка в канале произвольной магнитной системой (МПФС, соленоидом и т.п.). В этой ситуации на электроны действуют только внешнее магнитное поле и электрическое поле пространственного заряда. Более того, если пульсации пучка не слишком велики, в уравнении Пуассона можно пренебречь продольной компонентой электрического поля E_z по сравнению с поперечными силами, что дает одномерное уравнение, которое интегрируется в явном виде:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho E_\rho = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad F_\rho(u,z) = eE_\rho = \frac{1}{2\varepsilon_0\sqrt{u}}\int_0^u \sigma(u,z)du$$

где $\sigma(u,z)$ – плотность пространственного заряда. Таким образом, мы имеем (1+1)D-мерную модель, комбинируя одномерную быструю модель для уравнений движения и явное решение одномерного уравнения Пуассона. Полученная (1+1)D-мерная программа более чем на порядок превышает по быстродействию традиционную двумерную программу и позволяет проводить оптимизацию магнитных систем, например МПФС для спиральных ЛБВ. Типичный результат счета - траектории электронов пучка, проходящего через МПФС, показан на Рис. 3.

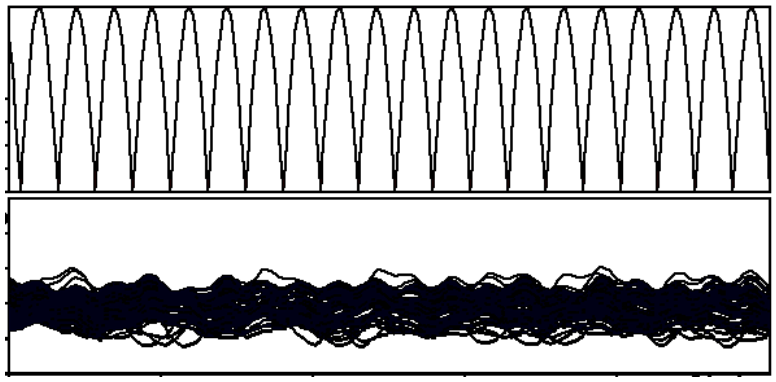

Рис 3. Профиль модуля продольной компоненты магнитного поля МПФС и траектории электронов фокусируемого трубчатого пучка.

Заключение

Введение новых переменных *u*, *w* позволило избежать сингулярностей в уравнениях движения для аксиально симметричных систем и разработать быстродействующий (1+1)D код для моделирования фокусировки электронных пучков магнитными системами.

1. Библиографический список

2. Солнцев В.А., Ведяшкина К.А. Двумерные модели и нелинейные уравнения аксиально-симметричных потоков. Электронная техника, Сер. 1, Электроника СВЧ, 1975, Вып. 2, с.34-44.
3. Солнцев В.А., Ведяшкина К.А. Численный анализ двумерных моделей аксиально-симметричных электронных потоков. Электронная техника, Сер. 1, Электроника СВЧ, 1975, Вып. 4, с.60-72.
4. A.V. Galdetskiy, On 2D simulation of particles motion in axially symmetric field in Proc. of Int. Vacuum Electronics Conf. IVEC-2012, Monterei, 2012. Available at (http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?tp=&arnumber=6262189&searchWithin%3Dp_Authors%3A.QT.Galdetskiy%2C+%2FA%2F.V..QT.%26searchWithin%3Dp_Author_Ids%3A37272766900%26sortType%3Ddesc_p_Publication_Year)