В.А. Сыровой

ФГУП "Всероссийский электротехнический институт"

Формирование осесимметричных и цилиндрических электронных пучков

Приведено новое решение задачи расчета формирующих электродов и внешних магнитных полей для цилиндрических пучков с произвольным сечением и произвольных релятивистских осесимметричных потоков.

Ключевые слова: релятивистские электронные пучки, формирующие электроды, произвольное сечение, произвольная граница

Решение задачи Коши для уравнения Лапласа применительно к расчету формирующих электродов произвольного осесимметричного пучка дано в работе [1]. Более удобная форма этого решения приведена в [2]:

$$\varphi=\mathrm{Re}\left\{\left[\frac{R_e(w)}{R}\right]^{1/2}\varphi_e(w)+\int_0^{\upsilon}\left(\frac{R_e}{R}\right)^{1/2}\left[\left(\varphi_{\upsilon e}+\frac{\beta_e\varphi_e}{2R_e}\right)\times\right.\right.$$

$$\times F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\lambda_e\right)-\frac{\varphi_e}{8R_eR}\left(\frac{R^2-R_e^2+(z_e-z)^2}{2R_e}\beta_e+(z_e-z)\alpha_e\right)\times$$

$$\left.\left.\times F\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2};2;\lambda_e\right)d\xi\right]\right\}, \tag{1}$$

$$z+iR=z_e(w)+iR_e(w),\quad \beta+i\alpha=z_e'+iR_e',\quad w=u+i\upsilon,$$

$$\lambda_e=-\frac{(R_e-R)^2+(z_e-z)^2}{4RR_e},\quad \zeta=u+i\xi.$$

Здесь $z=z_e(u)$, $R=R_e(u)$ – параметрические уравнения границы пучка; $\varphi_e,\varphi_{\upsilon e}$ – условия Коши на границе; F – гипергеометрическая функция Гаусса; индекс e относит величины к границе потока, функции с этим индексом под интегралом зависят от ζ.

На границе релятивистского пучка должны быть непрерывны также компоненты напряженности магнитного поля. В результате для функции $A=RA_\psi,$ где A_ψ – азимутальная компонента векторного потенциала, возникает задача, аналогичная задаче для потенциала электрического поля φ. Ее решение имеет вид [3]:

$$A=\mathrm{Re}\left\{\left[\frac{R}{R_e(w)}\right]^{1/2}A_e(w)+\int_0^{\upsilon}\left(\frac{R}{R_e}\right)^{1/2}\left[\left(A_{\upsilon e}-\frac{\beta_eA_e}{2R_e}\right)F\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2};1;\lambda_e\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{3A_e}{8R_eR}\left(\frac{R^2-R_e^2+\left(z_e-z\right)^2}{2R_e}\beta_e+\left(z_e-z\right)\alpha_e\right)F\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2};2;\lambda_e\right)\Bigg]d\xi\Bigg\},\qquad(2)$$

$$A_e=\int R_e\left(\alpha H_z-\beta H_R\right)_e du,\quad \left(\frac{\partial A}{\partial \upsilon}\right)\equiv A_{\upsilon e}=R_e\left(\beta H_z+\alpha H_R\right)_e,$$

$$H_R=-\frac{1}{R}\frac{\partial A}{\partial z},\quad H_z=\frac{1}{R}\frac{\partial A}{\partial R}.$$

Для получения новой формы решения введем вместо φ, A новые искомые функции

$$W=\varphi\sqrt{R},\quad W=A/\sqrt{R}.\qquad(3)$$

Вне пучка функция W удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+a\frac{W}{R^2}=0,\qquad(4)$$

причем $a=1/4$ для φ и $a=-3/4$ для A. Внутри пучка для этих функций имеем

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 W_i}{\partial z^2}+\frac{1}{4}\frac{W_i}{R^2}=\rho\sqrt{R},\qquad(5)$$

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 W_i}{\partial z^2}-\frac{3}{4}\frac{W_i}{R^2}=-\frac{\rho\upsilon_\psi}{\sqrt{R}}.$$

Будем искать решение в форме, предложенной В.Т. Овчаровым [4] для осесимметричных параксиальных пучков, не опуская однако членов с продольными производными, как это делается в параксиальной теории

$$W=W_i+S.\qquad(6)$$

Представление (6) обеспечивает автоматическое выполнение условий Коши на границе потока, если функция S удовлетворяет на ней однородным условиям. При этом для S имеют место уравнения

$$\frac{\partial^2 S}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}+\frac{1}{4}\frac{S}{R^2}=-\rho\sqrt{R},\qquad(7)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}-\frac{3}{4}\frac{S_i}{R^2}=\frac{\rho\upsilon_\psi}{\sqrt{R}}.$$

Решения (1), (2) получены по методу Римана для уравнений эллиптического типа [5]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+A(x,y)\frac{\partial \Phi}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial \Phi}{\partial y}+C(x,y)\Phi=F(x,y)\qquad(8)$$

с использованием формулы Римана для однородного $F=0$ уравнения (8):

$$\Phi = \mathrm{Re}\left\{(\Phi G)_P + \int_0^{\upsilon}\left[G\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon} - \Phi\frac{\partial G}{\partial\upsilon} + (\mathrm{Im}\, f)\Phi G\right]_e d\xi + \int_0^{\upsilon} d\eta \int_0^{\upsilon-\eta} G h^2 F d\xi\right\}, \qquad (9)$$

$$f = h^2 (A + iB)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right), h^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Здесь G – функция Римана: u,υ- криволинейные координаты с конформной метрикой $h_1 = h_2 = h.$ Внеинтегральный член вычисляется в точке P с координатами (w_c, w_c), лежащей на пересечении характеристики $w = w_c$ и начальной поверхности $w = w^*\,(\upsilon = 0)$, и зависит от $w = u + i\upsilon$. Все функции под одинарным интегралом имеют смысл величин на границе $\upsilon = 0$ с аргументом $\zeta = u + i\xi.$ Интегранд двойного интеграла вычисляется как функция аргументов u,υ, а затем аналитически продолжается по u $(u \to \zeta)$ с заменой $\upsilon \to \eta$.

Применение формулы (9) для функций из (7) приводит к новой по сравнению с (1), (2) формой решения:

$$\varphi = \varphi_i - \frac{1}{\sqrt{R}}\int_0^{\upsilon} d\eta \int_0^{\upsilon-\eta} \rho\sqrt{R}\, h^2 F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\lambda\right) d\xi, \qquad (10)$$

$$A = A_i + \frac{1}{\sqrt{R}}\int_0^{\upsilon} d\eta \int_0^{\upsilon-\eta} \frac{\rho\upsilon_\psi}{\sqrt{R}} h^2 F\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2};1;\lambda\right) d\xi,$$

$$\lambda = -\frac{\left[R_e(\xi,\eta) - R(u,\upsilon)\right]^2 + \left[z_e(\xi,\eta) - z(u,\upsilon)\right]^2}{4R(u,\upsilon)R_e(\xi,\eta)}.$$

Следует подчеркнуть, что выражения (10) в отличие от (1), (2) не являются новым решением задачи Коши в абстрактно математической постановке. Эти выражения подразумевают существование пучка с отличными от нуля функциями $\rho, \rho\upsilon_\psi$ и неоднородных уравнений эллиптического типа (7).

Точное решение задачи о формировании пучка в виде цилиндра с произвольным сечением при эмиссии в ρ-режиме: $\varphi = z^{4/3},\ \partial\varphi/\partial n = 0$ построено в работе [2]. Алгоритм основан на исключении зависимости по z при помощи интегрального преобразования, решении возникающей двумерной задачи по методу Римана и выполнении обратного интегрального преобразования с использованием интеграла Липшица-Ганкеля. Окончательное выражение для потенциала имеет вид

$$\varphi(x,y,z) = z^{4/3} - \frac{2}{9}\mathrm{Re}\int_0^{\upsilon}\frac{(x_e - x)\beta_e - (y_e - y)\alpha_e}{\left(z^2 + r_e^2\right)^{1/3}} F\left(\frac{1}{3},\frac{7}{6};2;\lambda_e\right) d\xi,$$

$$x + iy = x_e(w) + iy_e(w), \quad \alpha_e + i\beta_e = x_e' + iy_e', \qquad (11)$$

$$r_e^2 = \left(x_e - x\right)^2 + \left(y - y_e\right)^2, \quad \lambda_e = r_e^2 \Big/ \left(z^2 + r_e^2\right),$$

где $x = x_e\left(u\right)$, $y = y_e\left(u\right)$ – параметрические уравнения контура, ограничивающего сечение пучка.

Если представить потенциал в виде (6), то новая форма решения описывается выражением

$$\varphi = z^{4/3} - \frac{4}{9}\operatorname{Re}\int_0^{\upsilon} d\eta \int_0^{\upsilon-\eta} \frac{h^2}{\left(z^2 + r^2\right)^{1/3}} F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; 1; \lambda\right) d\xi,$$

$$r^2 = \left[x\left(u + i\,\xi, \eta\right) - x\left(u, \upsilon\right)\right]^2 + \left[y\left(u + i\,\xi, \eta\right) - y\left(u, \upsilon\right)\right]^2, \tag{12}$$

$$\lambda = r^2 \Big/ \left(z^2 + r^2\right).$$

Решения (10), (12) имеют более компактную форму по сравнению с (1), (2), (11). Общие ограничения для всех этих решений обусловлены отсутствием конструктивных алгоритмов построения конформного отображения внешности произвольной кривой на какую-либо каноническую область. Использование аналитического продолжения параметрических уравнений контура или границы пучка может приводить к решению, ограниченному некоторой окрестностью граничной кривой. Тем не менее значительное количество задач удается решить, используя описанные алгоритмы [5].

Библиографический список

1. Harker K.J. //Solution of the Cauchy problem for Laplace's equation in axially symmetric systems. // J. Math. Phys. – 1963. – Vol. 4. – №7. – pp. 993-997.
2. Сыровой В.А. Решение задачи Коши для уравнения Лапласа в трехмерном случае применительно к проблеме формирования интенсивных пучков заряженных частиц / В.А. Сыровой // – Прикл. матем. и механика. – 1970. – Т.34. – №1. – С. 4-16.
3. Сыровой В.А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. / В.А. Сыровой // Москва: Энергоатомиздат. – 2004.
4. Овчаров В.Т. Внешняя задача для параксиальных электронных пучков. / В.Т. Овчаров // – Радиотехника и электроника. – 1967. – Т.12. – №12. – С. 2156-2161.
5. Сыровой В.А. Теория интенсивных пучков заряженных частиц. / В.А. Сыровой // Москва: Энергоатомиздат. – 2004.