В.А. Сыровой

ФГУП "Всероссийский электротехнический институт"

Новый вариант геометризованной теории релятивистских электронных пучков

Представлен новый вариант геометризованной теории плотных электронных пучков, в котором заранее неизвестная система координат связана с траекториями или трубками тока и с потенциалом в качестве продольной координаты.

Ключевые слова: геометризованная теория, релятивистские электронные пучки

Геометризованная теория, основанная на введении заранее неизвестной неортогональной системы координат $x^i\left(i=1,2,3\right)$, связанной с геометрией потока, построена в ряде работ, монографии [1], а в наиболее полном виде изложена в [2].

Возможны два варианта геометризации: в первом из них координатные линии x^1 отождествлены с траекториями частиц, во втором поверхности $x^2=\mathrm{const}$ представляет собой трубки тока. В обоих случаях продольная координата x^1 относится к категории геометрических понятий и не связана с физикой явления. При синтезе непараксиальных осесимметричных пучков или трехмерных электростатических течений в качестве x^1 могла использоваться длина дуги l образующей базовой трубки тока или базовой траектории, на которой известна начальная информация о пучке. Чтобы различать подход [1, 2] и предлагаемый вариант теории будем говорить о l - и φ-представлениях соответственно.

В задаче Коши, когда вся необходимая начальная информация задана на стартовой поверхности $x^1=0$, система уравнений геометризованной l-теории относительно физических параметров потока и элементов g_{ik} метрического тензора системы x^i, включающая уравнения пучка и условия эвклидовости пространства (шесть тождеств Ляме), оказывается недоопределенной. Этот факт позволяет считать один из элементов метрического тензора, а именно g_{12}, заданной функцией, вид которой подбирается таким образом, чтобы регуляризовать решение, удовлетворяющее при $x^1=0$ условиям эмиссии в ρ - или T-режиме.

Использование в качестве продольной координаты x^1 потенциала электрического поля φ позволяет построить новый вариант теории пространственных течений. В ряде случаев при использовании φ-формализма приближенные модели дают более точный результат по сравнению с l-подходом. φ-вариант теории, в частности, может быть удобен, когда старт осуществляется с поверхности $\varphi=\mathrm{const}$ при неортогональной инжекции частиц.

Конфигурация траекторий или трубок тока, дополненная картиной эквипотенциальных поверхностей, дает значительную по полноте картину течения. Использование φ-представления тем самым способствует еще большей переформулировке физической задачи в задачу построения системы координат, выражающей сущность физического явления.

Уравнения, описывающие φ-геометризацию, нельзя получить из системы l-варианта по формулам перехода от одной криволинейной системы к другой. Потенциал φ, меняя свой статус искомой функции и становясь независимой переменной, уменьшает число зависимых переменных на единицу при сохранении числа уравнений; порядок уравнения Пуассона при этом снижается со второго на первый. В результате в отличие от l-варианта геометризации в φ-варианте система уравнений геометризованной теории становится полной.

Следствием перехода от l- к φ-формализму является тот факт, что пространственные электростатические потоки соответствуют метрическому тензору с отличными от нуля недиагональными элементами, в то время как прежде в этом случае $g_{12} = g_{13} \equiv 0$. Кроме того, φ-формализм требует монотонного изменения потенциала в продольном направлении, а поверхность экстремума становится сингулярной поверхностью подобно эмиттеру в ρ- или T-режиме, но со своим видом асимптотики.

В общем случае модель описывает трехмерные немоноэнергетические релятивистские пучки. Ниже приведены уравнения, соответствующие осесимметричным потокам, когда два семейства поверхностей вращения $x^1 = \mathrm{const}$, $x^2 = \mathrm{const}$ ортогональны полуплоскостям $x^3 = \psi = \mathrm{const}$. Элементы g_{ik} при этом определены формулами

$$g_{11} \equiv h_1^2, \quad g_{22} \equiv h_2^2, \quad g_{33} = h_3^2 = R^2, \quad g_{12} = h_1 h_2 \cos\theta_{12},$$

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \sin\theta_{12}, \quad g_{13} = g_{23} = 0,$$

где θ_{12} – угол между осями x^1, x^2.

Из шести тождеств Ляме в осесимметричном случае остается только одно:

$$h_2 h_{2,11} - g_{12,12} + h_1 h_{1,22} + \frac{1}{\sin^2\theta_{12}} \left\{ -\left(h_{2,1}^2 + h_{1,2}^2\right)\cos^2\theta_{12} + \frac{h_{1,1}}{h_1}\left(g_{12,2} - h_2 h_{2,1}\right) + \right.$$

$$+ \frac{h_{2,2}}{h_2}\left(g_{12,1} - h_1 h_{1,2}\right) + \cos\theta_{12}\left[-h_{1,1} h_{2,2} + \left(\frac{1}{h_1} g_{12,1} + h_{1,2}\right) h_{2,1} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{h_2}\left(\frac{1}{h_1} g_{12,1} - h_{1,2}\right) g_{12,2} \right]\right\} = 0,$$

$$h_{2,11} \equiv \partial^2 h_2 \Big/ \left(\partial x^1\right)^2, \quad g_{12,12} \equiv \partial^2 g_{12} \Big/ \partial x^1 \partial x^2.$$

Интеграл энергии и сохранение ковариантной компоненты P_3 обобщенного импульса на трубке тока описываются соотношениями

$$\mathcal{H}\left(x^2\right)=\left[1-\left(u^2+w^2\right)\right]^{-1/2}-\varphi,\quad h_3 w+A_3=P_3\left(x^2\right)\equiv P\left(x^2\right),$$

где $\mathcal{H}$ – полная энергия; A_3– компонента векторного потенциала; u, w – продольная и азимутальная компоненты скорости. Все соотношения записаны в релятивистской нормировке, исключающей физические постоянные используемой системы единиц.

Оставшееся уравнение движения запишется следующим образом:

$$\mathcal{H}_{,2}=\frac{w}{h_3}P_{,2}-u\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{g_{1,2}\bar{u}}{h_1}\right)_{,1}-\frac{1}{h_1}\left(h_1\bar{u}\right)_{,2}+h_2\sin\theta_{12}N\right],$$

$$\bar{u}=u\left[1-\left(u^2+w^2\right)\right]^{-1/2},$$

где N – азимутальное магнитное поле.

Уравнения Пуассона и сохранения тока определены соотношениями

$$\left(\frac{h_2h_3}{h_1\sin\theta_{12}}\right)_{,1}-\left(\frac{h_3\cos\theta_{12}}{\sin\theta_{12}}\right)_{,2}=h_1h_2h_3\sin\theta_{12}\rho,$$

$$\left(h_2h_3\sin\theta_{12}\rho\mathrm{u}\right)_{,1}=0.$$

где ρ – плотность пространственного заряда.

Самосогласованное магнитное поле удовлетворяет уравнениям

$$H_{3,1}=0,\quad H_{3,2}=h_2h_3\sin\theta_{12}\rho u,\quad H_3=H_3\left(x^2\right),$$

$$H_{2,1}-H_{1,2}=h_1h_2\sin\theta_{12}\rho w,\quad \left(\sqrt{g}\,H^1\right)_{,1}+\left(\sqrt{g}\,H^2\right)_{,2}=0.$$

Приведем некоторые результаты тестирования [3] геометризованной модели третьего приближения, в которой искомые функции представляются фрагментами рядов Тэйлора по координате x^2, на точных решениях с мультипликативным разделением переменных в сферических r,θ и спиральных p,q координатах. Потенциал для этих решений имеет вид

$$\varphi=r^{2\alpha}\Phi(\theta),\quad \varphi=e^{2\alpha q}\Phi(p).$$

Приближенная модель точно воспроизводит траектории, причем ошибка определяется соотношением точного J_{ex} и приближенного J выражений для плотности тока эмиссии.

В координатах r, θ при $\alpha = 0$ эквипотенциальными поверхностями будут конусы $\theta = \text{const}$. В этом случае

$$J_{ex} = r^{-2}, \quad J = r_*^2\left(1 - 2s + 3s^2 - 4s^3\right), \quad s = r/r_* - 1. \qquad (1)$$

Для пучка со следующими параметрами

$$r_* = 1, \quad 0.75 < r < 1.2, \quad \Delta r = 0.45, \quad R_t = 2.5, \quad \Delta r/R_t = 0.18, \quad J_-/J_+ = 2.56$$

ошибка δ составляет 1.5%; R_t – радиус кривизны центральной траектории с точкой старта r_*, J_-/J_+ – отношение плотностей тока на нижней и верхней кромках пучка, $\Delta r/R_t$ – относительная толщина.

Для электростатических потоков с траекториями-окружностями при $\alpha = -1$ в осесимметричном и плоском случаях имеем

$$J_{ex} = r^{-5}, \quad J = r_*^{-5}\left(1 - 5s + 15s^2 - 35s^3\right), \quad s = r - 1,$$

$$r_* = 1, \quad 0.9 < r < 1.1, \quad \Delta r = 0.2, \quad R_t = 1, \quad \Delta r/R_t = 0.2, \qquad (2)$$

$$J_-/J_+ = 2.73, \quad \delta = 1\%.$$

Для плоского релятивистского потока с эквипотенциалями-спиралями $p = \text{const}$ при $\alpha = 0$ получаем

$$-0.5 < q < 0.5, \ R_t = 1.09, \ J_-/J_+ = 2.27, \ L = 0.97, \ \delta = 0{,}15\%,$$

где L – расстояние по прямой между кромками пучка на катоде, имеющее порядок R_t.

Перемаркировка поперечной координаты оказывается полезной для повышения точности приближенного решения. Для решения (1) переход от $s = r/r_* - 1$ к $\bar{s} = \ln\left(r/r_*\right)$ при той же точности описания обеспечивает расчет пучка со следующими параметрами

$$0.65 < r < 1.4, \quad \Delta r = 0.75, \quad \Delta r/R_t = 0.3, \quad J_-/J_+ = 4.71.$$

Для решения (2) замена параметра разложения $s = r - 1$ на $\bar{s} = r^{\mu} - 1$, $\mu = -1/2$ дает:

$$0.85 < r < 1.18, \quad \Delta r = 0.33, \quad R_t = 1, \quad \Delta r/R_t = 0.33, \quad J_-/J_+ = 5.16, \quad \delta \le 1\%.$$

Библиографический список

1. Сыровой В.А. Теория интенсивных пучков заряженных частиц. / В.А. Сыровой // Москва: Энергоатомиздат. – 2004.
2. Syrovoy V.A. Theory of intense beams of charged particles. / V.A. Syrovoy // – New York: Elsevier. – 2011.
3. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. Тестирование геометризованных моделей двумерных электронных пучков. / Т.М. Сапронова, В.А. Сыровой //– Радиотехника и электроника. – 2010. – Т.55. – №6. – С. 726-756.