

## Усовершенствованные методы численного моделирования высокочастотных электромагнитных полей

*В статье описываются методы и алгоритмы, позволяющие повысить эффективность наиболее распространенных численных методов моделирования высокочастотных электромагнитных полей – метода конечных разностей и метода конечных элементов. Рассматриваются алгоритмы аппроксимации криволинейных границ, увеличения точности конечно-разностных аппроксимаций, внедрения сосредоточенных элементов, быстрого частотного сканирования. Приводятся примеры применения алгоритмов*

**Ключевые слова:** вычислительная электродинамика, математическое моделирование

### Введение

В настоящее время математические модели СВЧ приборов и устройств служат надежным инструментом, без использования которого невозможно создание оптимальной конструкции современного СВЧ устройства или системы. Электродинамические модели СВЧ устройств основаны на одном из численных методов решения уравнений классической электродинамики. Классификация наиболее распространенных численных методов и примеры программ, их использующих, приведена на рис. 1.

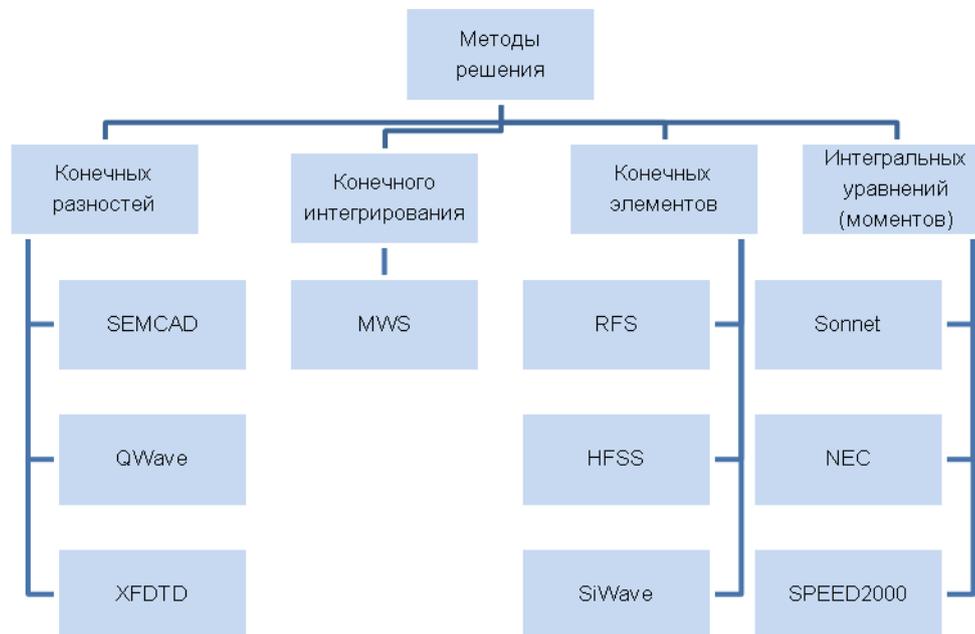


Рис. 1.

Следует отметить, что указанные методы могут быть реализованы как во временной, так и в частотной областях. В первом случае моделируется развитие электромагнитного процесса во времени, а его спектральная характеристика может быть получена с помощью преобразования Фурье. Такой подход позволяет

моделировать любые переходные процессы, однако для выхода на стационарный режим требуется значительное время моделирования, особенно для систем с большой добротностью.

Модели в частотной области предполагают, что электромагнитный процесс характеризуется гармонической зависимостью от времени, т. е. моделирование осуществляется на одной частоте. Для получения спектрального отклика необходимо многократно выполнять расчет в выбранных частотных точках заданного диапазона, что связано с большими затратами вычислительных ресурсов. Таким образом, каждый подход имеет свои преимущества и недостатки и свою область применения, хотя они и перекрываются.

Как показано на рис. 1, в настоящее время имеется целый ряд коммерческих программ, основанных на различных численных методах, которые успешно эксплуатируются разработчиками радиоэлектронной аппаратуры. Однако, по мере усложнения проектируемых изделий и ужесточения требований к их параметрам эти методы не всегда обеспечивают требуемую точность и приемлемое время решения. В связи с этим предпринимаются шаги по совершенствованию известных численных методов вычислительной электродинамики. В настоящей статье описан ряд алгоритмов, позволяющих увеличить эффективность наиболее распространенных методов: метода конечных разностей во временной области (КРВО) и метода конечных элементов в частотной области (КЭЧО).

## 1. Метод КРВО

Метод КРВО отличается простотой алгоритма, возможностью моделирования переходных процессов, он легко сочетается с уравнениями движения заряженных частиц, с уравнением теплопроводности и другими уравнениями математической физики. Теория классического метода КРВО подробно изложена в [1]. К недостаткам классического КРВО относятся плохая (ступенчатая) аппроксимация криволинейных границ, недостаточно точная замена производных по координатам и времени конечными разностями с погрешностью порядка  $O(h^2)$ , где  $h$  – шаг сетки. Длительность шага по времени ограничена критерием стабильности Куранта и реально составляет десятые или сотые доли пикосекунды, что приводит к необходимости выполнять большое число шагов с соответствующим увеличением вычислительных затрат. Кроме того, в методе КРВО, как и любом методе во временной области, наблюдается так называемая численная дисперсия, когда скорость распространения волны в однородной изотропной среде зависит от направления. Для устранения этих недостатков были предложены специальные алгоритмы.

**Учет дисперсии среды.** Метод КРВО позволяет сравнительно легко учесть временную дисперсию среды. Хотя в принципе закон дисперсии может быть любым, большинство реализаций используют модели дисперсии Дебая и Лоренца. Различные формулировки КРВО с дисперсией основаны на методе  $Z$ -преобразования и методе дискретной свертки. Одним из наиболее эффективных является алгоритм, использующий аналитическое решение уравнения движения вектора поляризации (или намагниченности) на одном временном шаге [2], [3]. Этот алгоритм позволяет

осуществить рекурсивное вычисление вектора поляризации (намагничивания), что существенно сокращает вычислительные затраты.

**Конформный КРВО.** Для уменьшения погрешностей, обусловленных ступенчатой аппроксимацией границ можно использовать неравномерную сетку, сгущающуюся около границы. Однако, это приводит к уменьшению шага по времени во всей расчетной области и росту вычислительных затрат. Алгоритмы, предложенные рядом исследователей, позволяют более точно аппроксимировать криволинейную границу, не уменьшая шага сетки. В пионерских работах [4], [5] предложен способ аппроксимации криволинейной границы, основанный на использовании регулярной сетки, часть объема ячейки которой, выступающая за границу, заполнена металлом. Погрешность аппроксимации в таких ячейках имеет порядок  $O(h)$  вместо  $O(h^2)$ . По мере заполнения металлом эффективные размеры ячейки уменьшаются, что приводит к необходимости, в соответствии с критерием Куранта, уменьшать шаг по времени.

Альтернативный алгоритм, предложенный в [6], предполагает замену частично заполненных металлом ячеек регулярными ячейками, заполненными однородной средой с измененными проницаемостями. Так как размеры ячеек не изменяются, критерий Куранта не нарушается, и шаг по времени уменьшать не приходится.

**Симплектический КРВО.** Динамика многих консервативных динамических систем описывается уравнениями Гамильтона. Эволюцию таких систем можно рассматривать как симплектическое преобразование этих уравнений [7]. Так как уравнения Максвелла можно рассматривать как уравнения бесконечномерной гамильтоновой системы, с помощью симплектических схем может быть получено их стабильное и точное решение, удовлетворяющее закону сохранения энергии. Симплектический метод конечных разностей предполагает разбиение каждого шага по времени на несколько стадий, однако величина шага может быть на несколько порядков больше, чем определяется критерием Куранта. В работе [8] показано, что симплектические свойства уравнений Максвелла сохраняются при их дискретизации в пространстве и во времени, что позволяет строить эффективные алгоритмы моделирования.

**Неявный метод КРВО.** Стремление преодолеть критерий стабильности Куранта привело к появлению неявных схем КРВО, абсолютно стабильных при любом шаге по времени. Ограничением в данном случае служит только максимальная скорость изменения электромагнитного поля во времени. Особенно эффективным оказался неявный метод КРВО переменных направлений [9]. Алгоритм применяется к обычной конечно-разностной схеме, однако в пространстве строятся две сетки, сдвинутые на половину шага относительно друг друга. Шаг по времени также делится на два стадии, на каждой из которых решается система уравнений, позволяющая обновить значения поля в узлах сетки. Несмотря на отсутствие ограничений по временному шагу, этот метод требует значительных вычислительных ресурсов, так как в отличие от обычной явной схемы, он требует решения системы линейных алгебраических уравнений на каждом шаге по времени. Для решения используют специальные методы, учитывающие разреженность матрицы конечно-разностной системы уравнений.

## 2. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов в частотной области является одним из наиболее мощных и универсальных методов численного решения уравнений математической физики. Его применение к задачам электродинамики подробно описано в [10]. Реализация КЭЧО в вычислительной программе RFS описана в [11]. Рассмотрим некоторые усовершенствования этого метода.

**Быстрое частотное сканирование.** Один из недостатков классического метода КЭ – необходимость многократно проводить вычисления для построения частотной характеристики устройства. Алгоритм быстрого частного сканирования позволяет по результатам расчета поля и параметров устройства в одной частотной точке получить его спектральный отклик в широкой полосе частот, охватывающей 2-3 октавы. Метод основан на представлении матрицы, вектора правой части и вектора неизвестных системы конечно-элементных уравнений в виде разложений по степеням комплексной частоты и приравнивании членов с одинаковыми степенями. В результате получаем решение в виде суммы ряда по степеням комплексной частоты с известными коэффициентами (моментами). Наиболее эффективный вариант этого метода описан в [12]. Метод позволяет на несколько порядков уменьшить время расчета характеристик системы в широком диапазоне частот.

**Сосредоточенные порты и элементы.** Современные печатные платы и гибридные интегральные схемы содержат большое количество сосредоточенных элементов (СЭ) – конденсаторов, резисторов, индукторов. Эти элементы имеют малые размеры по сравнению с длиной волны, и включение их в конечно-элементную сетку требует использования сеток с малым шагом, что не оправдано с точки зрения электродинамики. Поэтому были разработаны алгоритмы, позволяющие представлять эти сосредоточенные элементы в виде эквивалентной схемы и эту схему включать в полевую модель. Первоначально эти алгоритмы использовались в КРВО, так как этот метод использует регулярную гексаэдральную сетку, одна из ячеек которой может служить сосредоточенным элементом. В работе [13] была предложен алгоритм встраивания в конечно-элементную сетку сосредоточенных элементов, включающих произвольное число тетраэдров. Эквивалентная схема модели состоит из параллельно включенных резистора, конденсатора и индуктора. Такая модель не требует использования специальных генераторов сетки и позволяет использовать в модели устройства произвольное число сосредоточенных элементов.

Сосредоточенный порт (источник возбуждения) представляется в виде прямой линии или прямоугольника, состоящих из произвольного числа ребер или граней сетки. Эта модель также не требует использования специальных генераторов сетки.

### Заключение

Описанные усовершенствования позволяют существенно увеличить эффективность моделирования. Многочисленные тестовые расчеты, а также сравнение результатов, полученных с помощью усовершенствованных алгоритмов, с результатами измерений и расчетов другими методами подтверждают их высокую эффективность и устойчивость. В частности, программа RFS эффективно используется для анализа и проектирования антенн сотовых телефонов [12].

## Библиографический список

1. Taflov A., Hagness S.C. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. / 3-d edition. // N.-Y.: Artech House, 2005. 1006 p.
2. Григорьев А.Д. Современные методы моделирования нестационарных электромагнитных полей // Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика. 1999. С. 48-57.
3. Andreev J.V., Grigoriev A.D. Simulation of transient electromagnetic fields in regions filled with dispersive medium // Int. winter school microwave electronics radiophys. Saratov State Univ. 1999. Pp. 65-66.
4. Gwarek W.K. Analysis of an arbitrary-shaped planar circuit a time-domain approach // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1985. V. 33. No. 10. Pp. 1067-1072.
5. Finite-difference time-domain modeling of curved surfaces / T. Jurgens, A. Taflov, K. Umashankar, T. G. Moore // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1992. Vol. 40, No. 4. Pp. 357-365.
6. Zagorodnov I.A., Schuhmann R., Weiland T. A uniformly stable conformal FDTD-method in cartesian grids // Int. J. Numer. Model. 2003. V.~16. Pp. 127-141.
7. Арнольд В.И., Гивенталь А.Б. Симплектическая геометрия. Ижевск: Научно-издат. центр РХД, 2000. 168 с.
8. Maxwell's equations, symplectic matrix, and grid / W. Sha, X.L. Wu, Z.X. Huang, C. // PIER B. 2008. V.8. Pp. 115-127.
9. Namiki T. 3-D ADI-FDTD method-unconditionally stable time-domain algorithm for solving full vector Maxwell's equations // IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 2000. V. 48, No. 10. Pp. 1743-1748.
10. Jin J. The finite element method in electromagnetic. / 2-nd edition. N.-Y.: John Wiley & Sons Inc, 2002. 752 p.
11. Григорьев А.Д., Салимов Р.В., Тихонов Р.И. Моделирование антенн сотовых телефонов методом векторных конечных элементов. // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57. № 3. С. 261-270.
12. Slone R.D., Lee R., Lee J.-F. Well-conditioned asymptotic waveform evaluation for finite elements // IEEE Trans. Antennas Propagat. 2003. V. 51, No.9. Pp. 2442--2447.
13. Grigoryev A.D., Salimov R.V., Tikhonov R.I. Multiple-cell lumped element and port models for the vector finite element method // Electromagnetics. 2008. V. 25, No. 6. Pp. 18--26.