

**Об угловой ширине дифракционного луча в анизотропных средах**

*На примере дифракции поверхностной магнитостатической волны рассчитана двумерная дифракционная картина, возникающая в дальней зоне ферритовой пластины при падении на широкую, произвольно ориентированную щель в непрозрачном экране плоской волны с неколлинеарными групповой и фазовой скоростями. Получена универсальная аналитическая формула для угловой ширины дифракционного луча. Указанная формула применима для вычисления угловой ширины луча как для магнитостатических волн, так и для волн другой природы в различных анизотропных средах и структурах (включая метаматериалы) для двумерных геометрий. Показано, что угловая ширина дифракционного луча в анизотропных средах может быть не только больше или меньше величины  $\lambda_0/D$  ( $\lambda_0$  – длина исходной плоской волны,  $D$  – длина щели), но, при определенных условиях, угловая ширина луча может быть равна нулю.*

**Ключевые слова:** дифракция, анизотропная среда, магнитостатическая волна, угловая ширина луча

Волны разной физической природы, распространяющиеся в различных средах и структурах, как известно, характеризуются общими физическими закономерностями [1]. Наиболее известными из них, безусловно, являются законы геометрической оптики и формула, описывающая угловую ширину дифракционного луча (возникающего, например, при падении плоской волны на щель в непрозрачном экране) как отношение длины исходной волны  $\lambda_0$  к длине щели  $D$ . Отношение  $\lambda_0/D$ , как известно, определяет критерий разрешимости Рэлея, играющий важную роль для оценочных расчетов [1]. Как видно из [2], закономерности отражения и преломления волн в анизотропных средах определяются математическими свойствами изочастотных зависимостей, поэтому очевидно предположить, что эти свойства определяют также и угловую ширину дифракционного луча в анизотропных средах. Таким образом, естественно, возникают вопросы: 1) может ли угловая ширина дифракционного луча в анизотропных средах быть меньше величины  $\lambda_0/D$  и насколько? 2) можно ли вывести некую универсальную приближенную формулу для оценки угловой ширины дифракционного луча в анизотропных средах?

С целью поиска ответов на поставленные вопросы на примере МСВ, распространяющейся в ферритовой пластине, исследована двумерная дифракционная картина, возникающая в дальней зоне при падении плоской МСВ на широкую щель в непрозрачном экране для наиболее общего случая, когда групповая и фазовая скорости исходной волны не коллинеарны, а ориентация экрана произвольна. В итоге проведенного рассмотрения выведена универсальная аналитическая формула, описывающая угловую ширину дифракционного луча в общем случае. Установленные на примере рассмотрения МСВ наиболее общие закономерности, очевидно, можно считать характерными и для дифракции волн иной природы в анизотропных средах и структурах. Результаты, полученные в ходе данного исследования, кратко изложены

ниже (подробнее см. [3, 4]).

Рассмотрим ферритовую пластину толщиной  $s$ , намагниченную до насыщения касательным однородным магнитным полем  $\mathbf{H}_0$  и находящуюся в вакууме. Введем декартову и соответствующую полярную системы координат  $\Sigma_D = \{x; y; z\}$  и  $\Sigma_P = \{x; r; \varphi\}$ , так, чтобы ось  $x$  была перпендикулярна поверхности пластины, а ось  $z$  была параллельна вектору  $\mathbf{H}_0$ . Пусть ферритовая пластина характеризуется тензором магнитной проницаемости с диагональной и недиагональной компонентами  $\mu$  и  $\nu$ . Для описания магнитостатической волны (МСВ) используем уравнения магнитостатики  $\text{rot } \mathbf{h} = 0$  и  $\text{div } \mathbf{b} = 0$  и введем магнитостатический потенциал  $\Psi$  в соответствии с формулой  $\mathbf{h} = \text{grad } \Psi$  [5].

Рассмотрим дифракционную картину для наиболее общего случая, когда плоская поверхностная МСВ с частотой  $f_0$  падает на щель шириной  $D$  в бесконечно тонком, произвольно ориентированном и непроницаемом для МСВ экране, причем волновой вектор  $\mathbf{k}_0$  и вектор групповой скорости волны  $\mathbf{V}_0$  не коллинеарны (рис. 1). Введем дополнительные декартову и полярную системы координат  $\Sigma'_D = \{x; y'; z'\}$  и  $\Sigma'_P = \{x; r; \varphi'\}$ , в которых ось  $x$  тоже перпендикулярна поверхности пластины, а оси  $y$  и  $z$  связаны с ориентацией экрана, то есть, новые системы координат  $\Sigma'_D$  и  $\Sigma'_P$  получаются в результате поворота систем  $\Sigma_D$  и  $\Sigma_P$  вокруг общей оси  $x$  на угол  $\theta$ , а координата  $r$  и направление отсчета углов в обеих полярных системах совпадают (рис. 1). Для описания ориентации произвольных волнового вектора  $\mathbf{k}$  и вектора групповой скорости  $\mathbf{V}$  МСВ в новых системах координат  $\Sigma'_D$  и  $\Sigma'_P$  введем, соответственно, углы  $\varphi'$  и  $\psi'$ , связанные с аналогичными углами  $\varphi$  и  $\psi$  систем  $\Sigma_D$  и  $\Sigma_P$  соотношениями  $\varphi' = \varphi - \theta$  и  $\psi' = \psi - \theta$ .

В соответствии с принципом Гюйгенса, будем считать, что при падении на щель неколлинеарной плоской МСВ вдоль линии щели возникает распределение вторичных источников МСВ, для оценки действия которых в далекой точке необходимо произвести интегрирование (т. е. вычислить суперпозицию) по вкладам от всех бесконечно малых элементов (вторичных источников МСВ) на щели. Для нахождения дифракционной картины будем следовать в целом известным методам, используемым для изотропных сред (см., например, [1, 6]). Однако, необходимо учитывать анизотропный характер распространения МСВ и решать поставленную задачу с учетом следующих замечаний:

1. Поскольку магнитный потенциал МСВ  $\Psi$  является скалярной величиной, то для вычисления суммарного поля вторичных источников в некоторой далекой точке наблюдения можно просто складывать в этой точке магнитные потенциалы возмущений от всех вторичных источников МСВ, расположенных вдоль линии щели.

2. В отличие от аналогичной дифракционной задачи для изотропных сред, мы всегда будем иметь дело с двумя направлениями  $\varphi$  и  $\psi$  (или – в системах координат  $\Sigma'_D$  и  $\Sigma'_P$  –  $\varphi'$  и  $\psi'$ ), определяющими ориентацию волнового вектора  $\mathbf{k}$  и вектора групповой скорости  $\mathbf{V}$  волны. Причем, условия, определяющие конструктивную интерференцию вторичных источников МСВ, будут записаны для их волновых векторов, то есть, для направления  $\varphi$  (или  $\varphi'$ ), но перенос энергии волны при возникновении данной конструктивной интерференции будет осуществляться в направлении

соответствующего вектора групповой скорости  $\psi$  (или  $\psi'$ ). Поэтому, для описания исследуемой задачи, введем две далекие точки –  $P_k$  и  $P_v$ , такие, что направление на точку  $P_k$  будет совпадать с ориентацией  $\varphi$  волновых векторов вторичных источников МСВ, а направление на точку  $P_v$  – с ориентацией  $\psi$  соответствующих им групповых скоростей (рис. 1).

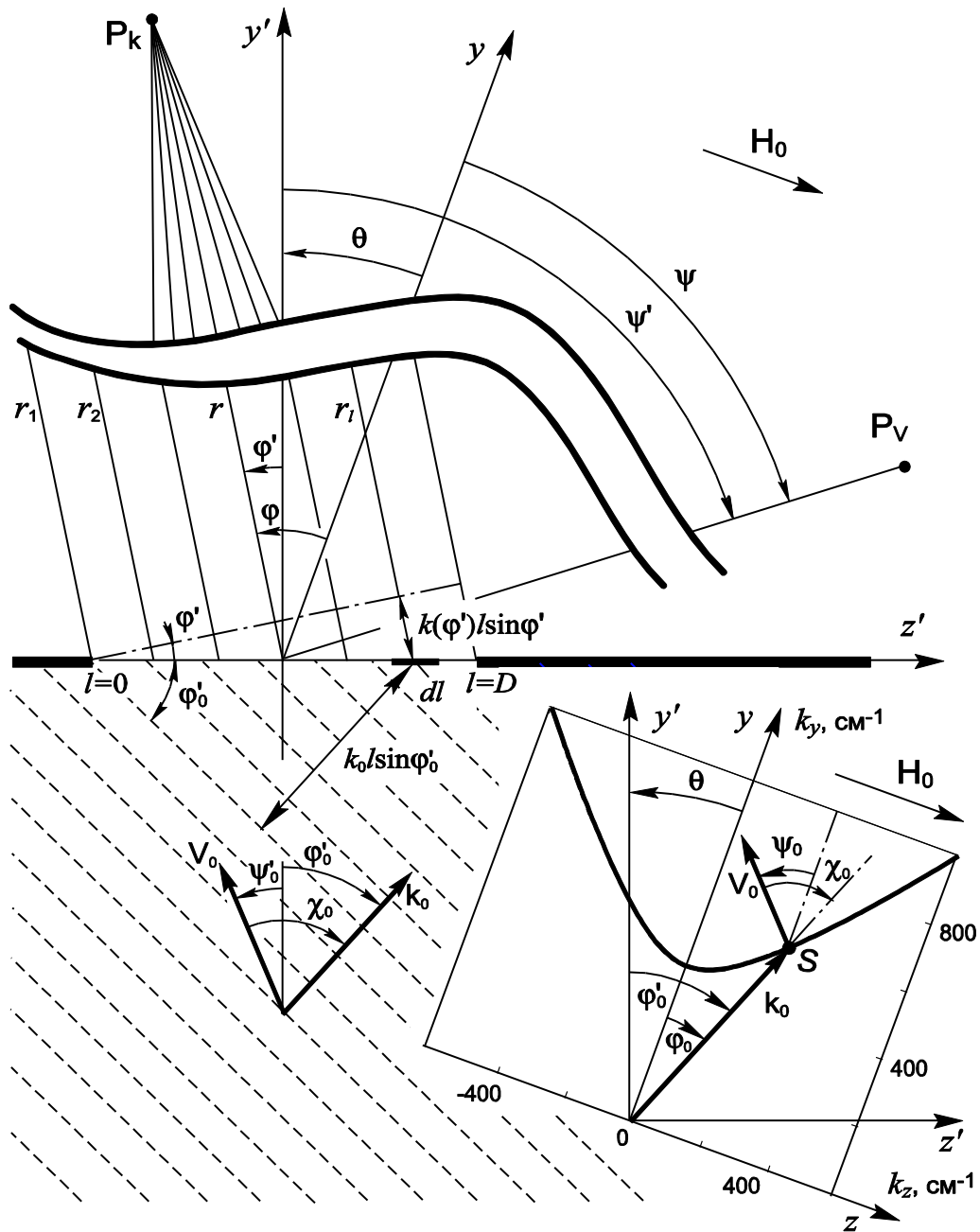


Рис. 1. Геометрия падения МСВ на щель. Штриховыми линиями показаны волновые фронты исходной волны. Для произвольного участка щели  $dl$  с координатой  $l$  отмечены фазовый набег  $k(\varphi)l/\sin\varphi'$ , обусловленный различием в расстояниях  $r_1$  и  $r_1$ , и разность фаз  $k_0l/\sin\varphi'_0$ , обусловленная тем, что исходная волна не одновременно достигает вторичных возбудителей с координатами 0 и  $l$ . На вставке показана изочастотная зависимость МСВ  $k(\varphi)$  с  $f_0 = 2900$  МГц, рассчитанная при  $H_0 = 300$  Э,  $s = 10$  мкм и  $4\pi M_0 = 1750$  Гс.

3. Будем считать, что изочастотная зависимость МСВ  $k(\varphi)$  и соответствующая зависимость  $\psi(\varphi)$  являются *однозначными*, то есть, каждому значению аргумента соответствует одно значение ординаты (для поверхностной МСВ (ПМСВ), на примере которой мы проводим рассмотрение, это справедливо). Ради простоты рассмотрения предположим также, что обратная зависимость  $\varphi(\psi)$  также является однозначной. Таким образом, каждой точке  $P_k$  будет соответствовать *единственная* точка  $P_v$  и наоборот.

С учетом этих предположений можно найти, что угловое распределение суммарного магнитного потенциала (от всех вторичных источников МСВ) описывается выражением  $\sim \sin\Phi/\Phi$  (как и в изотропных средах), но фазовая функция  $\Phi$  имеет более сложный вид

$$\Phi(\varphi(\psi)) = \pi \frac{D}{\lambda_0} \left[ \sin(\varphi_0 - \theta) - \frac{k(\varphi(\psi))}{k_0} \sin(\varphi(\psi) - \theta) \right]. \quad (1)$$

Здесь  $k(\varphi)$  and  $\varphi(\psi)$  – зависимости, характеризующие определенную волну в анизотропной среде или структуре (в рассматриваемом примере – это ПМСВ в ферритовой пластине),  $\varphi_0$  и  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  – параметры падающей МСВ,  $D$  и  $\theta$  – длина и ориентация щели (рис. 1). Находя разность между направлениями  $\psi$  для случаев  $\Phi = 0$  ( $\sin\Phi/\Phi = 1$ ) и  $\Phi = \pi$  ( $\sin\Phi/\Phi = 0$ ), можно получить формулу, описывающую *абсолютную* угловую ширину дифракционного луча  $\Delta\psi$  по уровню 0.5. Однако, в анизотропных средах гораздо удобнее пользоваться *относительной* угловой шириной луча  $\sigma$ , которая связана с  $\Delta\psi$  простой формулой  $\sigma = \Delta\psi/(\lambda_0/D)$ . Таким образом, величина  $\sigma$  показывает, во сколько раз абсолютная угловая ширина луча  $\Delta\psi$  больше аналогичной величины  $\lambda_0/D$  в изотропной среде (при условии, что длина щели и длина исходной волны одинаковы). Относительная угловая ширина основного дифракционного луча  $\sigma$  описывается формулой

$$\sigma = \left| \frac{\frac{d\psi}{d\varphi}(\varphi_0)}{\frac{dk}{d\varphi}(\varphi_0) \sin(\varphi_0 - \theta) + \cos(\varphi_0 - \theta)} \right| = \left| \frac{\frac{d\psi}{d\varphi}(\varphi_0)}{\frac{dk}{d\varphi}(\varphi_0) \sin \varphi'_0 + \cos \varphi'_0} \right|, \quad (2)$$

где  $d\psi/d\varphi$  и  $dk/d\varphi$  – производные функций  $\psi(\varphi)$  и  $k(\varphi)$  при  $\varphi = \varphi_0$ . В формуле (2) использован знак модуля, поскольку угловую ширину луча удобно характеризовать положительными числами (как и расстояния). Если вектор  $\mathbf{k}_0$  падающей МСВ нормален линии щели ( $\varphi'_0 = 0$ ), то знаменатель в (2) становится равным единице и формула упрощается. В этом случае для изотропных сред (для которых изочастотная зависимость имеет форму окружности, зависимость  $\psi(\varphi)$  имеет вид  $\psi = \varphi$ , а  $d\psi/d\varphi \equiv 1$ ) находим  $\sigma = 1$  и получаем хорошо известную формулу  $\Delta\psi = \lambda_0/D$ .

Несмотря на то, что формула (2) получена для МСВ, ее можно использовать и для других двумерных геометрий анизотропных сред и структур, включая метаматериалы. Как видно из формулы (2), величина  $\Delta\psi$  в анизотропных средах зависит от полярного

угла, описывающего исходную волну. При этом может наблюдаться необычное явление: если исходная волна характеризуется таким значением  $\varphi_0$ , при котором в данной среде  $d\psi/d\varphi = 0$ , то  $\sigma = \Delta\psi = 0$ ! Это означает, что дифракционный луч сохраняет свою ширину по мере распространения! Отметим, что не у любой волны изочастотная зависимость имеет точки, где  $d\psi/d\varphi = 0$ . Такие точки есть, например, на изочастотной зависимости ПМСВ (правда, не при любом значении частоты). На рис. 2 представлены расчеты величины  $\sigma$  по формуле (2) и на основе численных методов для случая  $\psi'_0 = 0$ , что соответствует всем геометриям, когда в исходной волне вектор  $\mathbf{V}_0$  нормален линии щели (параметры исходной волны для каждой геометрии меняются так, что угол  $\chi_0$  между векторами  $\mathbf{V}_0$  и  $\mathbf{k}_0$  изменяется от  $-90^\circ$  до  $+90^\circ$  – то есть, точка  $S$  на рис.1 «перемещается» от одной асимптоты до другой). Как видно на рис. 2, для МСВ с частотой  $f_0 = 2330$  МГц величина  $\sigma = 0$  при значениях  $\chi_0 = \pm 73^\circ$ , при которых  $d\psi/d\varphi = 0$ . В то же время на изочастотной зависимости ПМСВ с частотой  $f_0 = 2900$  МГц нет точек, где  $d\psi/d\varphi = 0$  и поэтому величина  $\sigma$  не бывает равна нулю, разве что при  $\chi_0 \rightarrow \pm 90^\circ$  величина  $\sigma \rightarrow 0$  (для всех частот), поскольку вблизи асимптот изочастотной зависимости ПМСВ величина  $dk/d\varphi \rightarrow \infty$  ( $dk/d\varphi$  стоит в знаменателе в (2)).

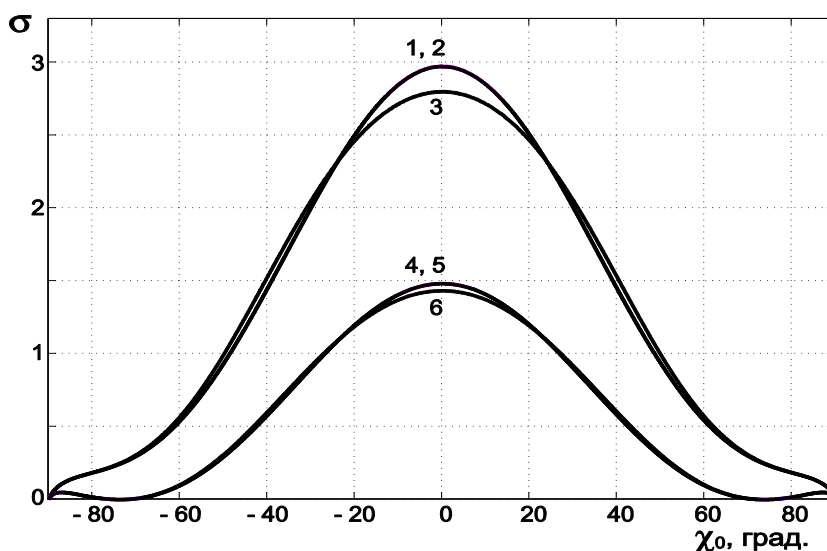


Рис. 2. Зависимость относительной угловой ширины основного дифракционного луча  $\sigma$  от угла  $\chi_0$  (между векторами  $\mathbf{V}_0$  и  $\mathbf{k}_0$  исходной ПМСВ) для случая, когда вектор  $\mathbf{V}_0$  сонаправлен с нормалью к экрану (осью  $y'$ ): 1 – 3 – для  $f_0 = 2900$  МГц, 4 – 6 – для  $f_0 = 2330$  МГц; 1, 4 – расчет по аналитической формуле (2), 2, 5 – численный расчет для  $\lambda_0/D = 0.01$ ; 3, 6 – численный расчет для  $\lambda_0/D = 0.1$ .

#### Библиографический список

3. Крауфорд Ф. *Волны* Берклеевский курс физики Том 3. М.: Наука, 1974.
4. Локк Э.Г. Свойства изочастотных зависимостей и законы геометрической оптики // УФН. 2008. Том 178, №4, С. 397-417.
5. Локк Э.Г. Угловая ширина луча при дифракции на щели волны с неколлинеарными групповой и фазовой скоростями // УФН. 2012 (В печати).
6. Edwin H. Lock. On the Angular Width of Diffractive Beam in Anisotropic Media // E-print Archive of Cornell University. <http://arxiv.org/abs/1112.3929>
7. Damon R. W., Eshbach J. R. J. Phys. Chem. Solids **19** 308 (1961)
8. Ландсберг Г. С. *Оптика* (М.: Наука, 1976)