А.В. Вашковский, Э.Г. Локк
Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

О закономерностях отражения и преломления волн в анизотропных средах и структурах

В рамках геометрической оптики на основе анализа математических свойств различных изочастотных зависимостей (называемых также сечениями поверхности волновых векторов) сформулированы общие закономерности отражения и преломления неколлинеарных волн в однородных анизотропных средах и структурах.

Ключевые слова: положительное и отрицательное отражение и преломление волн

При разработке приборов для микроэлектроники СВЧ с использованием анизотропных сред, структур и метаматериалов, важно представлять общие закономерности распространения, отражения и преломления волн при наличии анизотропии. Такие закономерности изложены в работах [1, 2], в которых проанализирована связь между математическими свойствами изочастотных зависимостей анизотропных сред (такими, как наличие асимптот, точек перегиба, центральной или осевой симметрии, однозначности или многозначности зависимости) и возникновением таких явлений, как невзаимное распространение, однонаправленное распространение, появление двух (нескольких) отраженных или преломленных лучей, отсутствие отражения, необратимость хода лучей при отражении и преломлении. Показано, что с помощью простых правил, можно установить, положительный или отрицательный характер отражения и преломления волн. Некоторые закономерности кратко изложены ниже (подробнее см. [1, 2]).

1. Закономерности отражения волн (на примере двумерных геометрий).

1.1 Отсутствие отраженного луча. Отражение будет отсутствовать при любых углах падения луча на границу, если:

- изочастотная зависимость структуры является функцией в некоторой системе координат, а граница параллельна оси абсцисс этой системы координат (напомним, что функцией называется зависимость, у которой каждому значению абсциссы соответствует одно значение ординаты);

- изочастотная зависимость структуры состоит из семейства кривых, каждая из которых в отдельности в некоторой системе координат обладает свойством однозначности (подобна функции), причем все кривые целиком расположены в одной полуплоскости, описывают волны одного и того же типа (все волны прямые или все обратные), а граница раздела параллельна границе этой полуплоскости.

Примером отсутствия отражения, удовлетворяющего первому правилу является случай, когда граница раздела сред перпендикулярна асимптоте изочастотных кривых поверхностной магнитостатической волны, которые для свободной пленки представляют собой центрально-симметричные, подобные гиперболам кривые.

1.2. Возникновение двух или нескольких отраженных лучей. При определенной ориентации границы по отношению к оси симметрии изочастотной зависимости структуры возникает не менее двух отраженных лучей, если изочастотная зависимость обладает хотя бы одним из следующих свойств:

- состоит из двух кривых, одна из которых является замкнутой;
- состоит из трех и более кривых (исключением является гипотетический случай – когда изочастотная зависимость состоит из параллельных прямых).
- одна из кривых изочастотной зависимости имеет точки перегиба.

1.3. Необратимость хода лучей при отражении. Если изочастотная зависимость структуры не является центрально симметричной фигурой, то возникает необратимость хода лучей при отражении.

1.4. Положительное и отрицательное отражение. Чтобы сформулировать условия, когда в анизотропной структуре отражение будет положительным и когда отрицательным, необходимо исследовать изочастотную зависимость структуры на наличие экстремумов и особых точек в системе координат волновых чисел $\Sigma'_k = \{0; k_b, k_n\}$, связанной с границей и нормалью к ней (ось абсцисс k_b параллельна границе, а ось ординат k_n – нормали). Так как в точках экстремума вектор групповой скорости одной из волн – падающей или отраженной – меняет ориентацию по отношению к нормали k_n, то вертикальные прямые, проведенные через точки экстремума, делят все значения проекции волнового вектора на границу (значения k_b) на интервалы, соответствующие положительному или отрицательному отражению. Пусть изочастотная зависимость волны в исходной среде в системе Σ'_k описывается уравнением $F(k_b,k_n)= 0$ или (если переменную k_n можно выразить в явном виде) зависимостью $k_n = P(k_b)$. Уравнение $F(k_b,k_n) = 0$ можно найти путем замены переменных из дисперсионного уравнения среды $F(k_y,k_z) = 0$.

В тех интервалах значений k_b, где на участке изочастотной зависимости $P_j(k_b)$, соответствующем j-ому отраженному лучу, производная $\partial P_j /\partial k_b$ имеет такой же знак, что и производная $\partial P_0 /\partial k_b$ на участке $P_0(k_b)$, соответствующем падающему лучу, j-ый отраженный луч испытывает отрицательное отражение. Если же знаки производных $\partial P_j /\partial k_b$ и $\partial P_0 /\partial k_b$ разные, то j-ый отраженный луч испытывает положительное отражение. При тех значениях k_b из множества $\{k_{b1}, k_{b2}, ..., k_{bm}\}$, при которых производная $\partial P_0 /\partial k_b = 0$, падающий луч ориентирован нормально к границе, а если $\partial P_j /\partial k_b = 0$, то j-ый отраженный луч ориентирован нормально к границе.

2. Закономерности преломления волн (на примере двумерных геометрий).

2.1. Возникновение двух или нескольких преломленных лучей. При определенной ориентации границы по отношению к оси симметрии изочастотной зависимости структуры (среды), в которую волна преломляется, возникает не менее двух преломленных лучей, если изочастотная зависимость этой среды обладает хотя бы одним из следующих свойств:

- состоит из двух кривых, одна из которых является замкнутой;
- состоит из трех и более кривых;
- одна из кривых изочастотной зависимости имеет точки перегиба.

2.2. Необратимость хода лучей при преломлении. Если изочастотная зависимость хотя бы одной из сред не является центрально симметричной, то возникает необратимость хода лучей при преломлении

2.3. Положительное и отрицательное преломление. Чтобы сформулировать условия, когда преломление из одной анизотропной среды в другую будет положительным и когда отрицательным (если, конечно, преломление волны имеет место), необходимо исследовать изочастотные зависимости обеих структур (сред) на наличие экстремумов и особых точек в системе координат $\Sigma'_k = \{0; k_b, k_n\}$, связанной с границей и нормалью (обозначения осей см. выше). Так как в точках экстремума вектор групповой скорости одной из волн – падающей или преломленной – меняет ориентацию по отношению к нормали k_n, то вертикальные прямые, проведенные через точки экстремума, делят все значения проекции волнового вектора на границу (значения k_b) на интервалы, соответствующие положительному или отрицательному преломлению. Пусть изочастотная зависимость волны в исходной среде в системе координат Σ'_k описывается дисперсионным уравнением $F(k_b,k_n) = 0$, а во второй среде, в которую волна преломляется – уравнением $G(k_b,k_n) = 0$ или, если из этих уравнений переменную k_n можно выразить в явном виде, – зависимостями $k_n = P(k_b)$ и $k_n = R(k_b)$ соответственно. Уравнения $F(k_b,k_n) = 0$ и $G(k_b,k_n) = 0$ легко найти путем обычной замены переменных из дисперсионных уравнений сред $F(k_{y1},k_{z1}) = 0$ и $G(k_{y2},k_{z2}) = 0$, записанных в системах координат, связанных с осями симметрии (оптическими осями) каждой из сред (в общем случае оптические оси сред не параллельны друг другу, поэтому исходные дисперсионные уравнения могут быть записаны в разных системах координат).

В тех интервалах значений k_b, где на участке изочастотной зависимости $R_j(k_b)$, соответствующем j-ому преломленному лучу, производная $\partial R_j /\partial k_b$ имеет такой же знак, что и производная $\partial P_0 /\partial k_b$ на участке $P_0(k_b)$, соответствующем падающему лучу, j-ый преломленный луч испытывает положительное преломление. Если же знаки производных $\partial R_j /\partial k_b$ и $\partial P_0 /\partial k_b$ разные, то j-ый преломленный луч испытывает отрицательное преломление. При тех значениях k_b из множества $\{k_{b1}, k_{b2}, ..., k_{bm}\}$, при которых производная $\partial P_0 /\partial k_b = 0$, падающий луч ориентирован нормально к границе, а если $\partial R_j /\partial k_b = 0$, то j-ый преломленный луч ориентирован нормально к границе.

3. Критерии положительного и отрицательного отражения и преломления волн в трехмерных геометриях.

В трехмерном случае плоскость падения не совпадает ни с одной плоскостью симметрии изочастотных поверхностей сред. При этом в плоскости падения лежат все волновые векторы **k**, соответствующие изочастотным зависимостям, и нормаль к поверхности раздела сред. Векторы групповой скорости **V**, соответствующие векторам **k** в общем случае не лежат в плоскости падения. Поэтому, методы, описанные выше и в [1], не применимы для *трехмерных* геометрий. Ниже на примере изочастотных поверхностей типа эллипсоида кратко рассматриваются математические критерии, позволяющие установить характер отражения и преломления волн в *трехмерных* анизотропных геометриях (подробнее см. [2]). Пусть имеется две среды, изочастотные поверхности которых для некоторой частоты *f* представляют собой произвольно ориентированные эллипсоиды. Среды разделяет произвольно ориентированная плоская граница. Через нормаль к этой границе проходит *плоскость падения*. Изочастотные зависимости (сечения эллипсоидов плоскостью падения) показаны на рис. 1а (плоскость рисунка совпадает с плоскостью падения). Ради простоты рассмотрения будем считать, что изочастотные зависимости обеих сред описывают волны с одинаковой поляризацией. Таким образом, в плоскости падения лежат (см. рис. 1а) изочастотные зависимости обеих сред (кривая *1* соответствует исходной среде, а кривая *2* – среде, в которую волна преломляется), прямая *3*, являющаяся пересечением плоскости падения и плоскости раздела сред (последняя перпендикулярна плоскости рисунка 1а), нормаль *4*, и волновые векторы падающего,

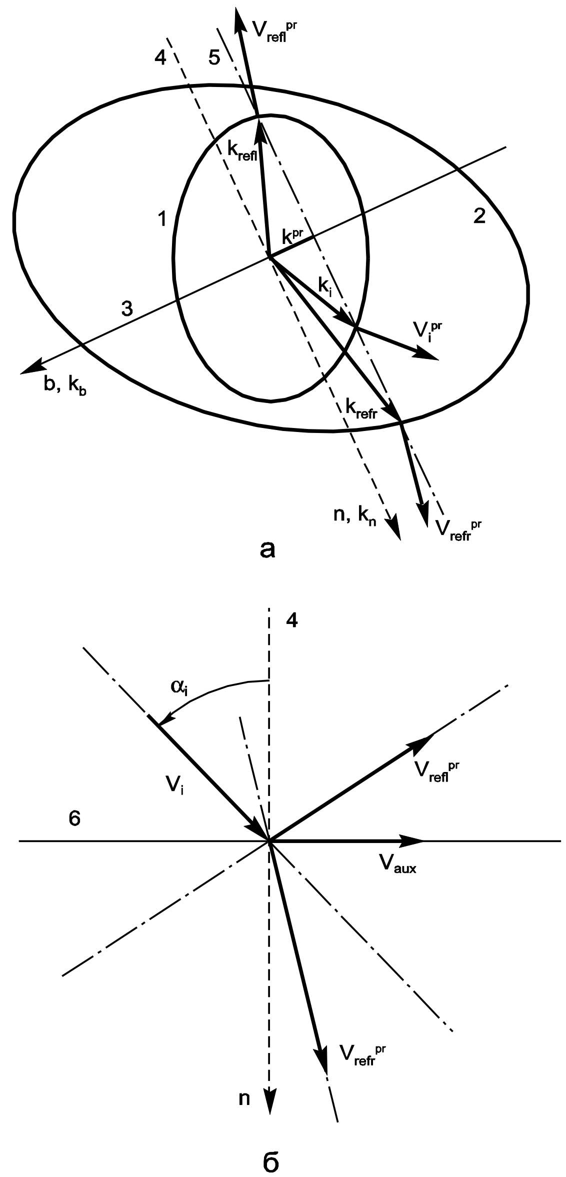

Рис. 1. Схема отражения и преломления луча в плоскости падения (***а***) и в плоскости падения луча (***б***): 1 – изочастотная кривая исходной среды, 2 – изочастотная кривая среды, в которую волна преломляется, 3 – прямая, являющаяся пересечением плоскости падения и плоскости раздела сред, 4 – нормаль к поверхности раздела сред и связанные с ней оси *n* и k_n, 5 – проектирующая прямая, 6 – прямая, являющаяся пересечением плоскости падения луча и плоскости раздела сред (плоскость раздела сред перпендикулярна плоскости рисунков 1*а* и 1*б*). Индексом «pr» отмечены проекции на

отраженного и преломленного лучей $\mathbf{k_i}$, $\mathbf{k_{refl}}$ и $\mathbf{k_{refr}}$. Векторы групповой скорости соответствующих лучей $\mathbf{V_i}$, $\mathbf{V_{refl}}$ и $\mathbf{V_{refr}}$ не лежат в плоскости падения (на рис. 1а показаны лишь их проекции на эту плоскость), причем векторы $\mathbf{V_i}$, $\mathbf{V_{refl}}$ и $\mathbf{V_{refr}}$ удовлетворяют, соответственно, условиям падения, отражения и преломления $(\mathbf{V_i}\,\mathbf{n}) > 0$, $(\mathbf{V_{refl}}\,\mathbf{n}) < 0$, $(\mathbf{V_{refr}}\,\mathbf{n}) > 0$ (то есть, падающий луч направлен на границу, отраженный – от границы в исходную среду, а преломленный – из исходной среды за границу).

Очевидно, что если анализировать отражение и преломление волны только в плоскости падения (по рис. 1а), то нельзя сказать ничего определенного о характере отражения и преломления. Так, на рис. 1а кажется, что имеет место отрицательное преломление, однако такое впечатление создается только на первый взгляд: если, например, оба вектора $\mathbf{V_i}$ и $\mathbf{V_{refr}}$ направлены под достаточно большими углами вперед от плоскости рисунка, то ясно, что будет иметь место положительное преломление. Как же установить, действительный характер отражения или преломления? Рассмотрим геометрию лучей для данного случая в реальном пространстве – в *плоскости падения луча*, где лежат нормаль и вектор групповой скорости падающего луча $\mathbf{V_i}$ (рис. 1*б*), при этом векторы $\mathbf{V_{refl}}$ и $\mathbf{V_{refr}}$ не лежат в этой плоскости. Введем в рассмотрение вспомогательный вектор $\mathbf{V_{aux}}$, обладающий следующим свойством: этот вектор направлен вдоль прямой *б*, то есть, лежит в плоскости падения луча и в плоскости раздела сред одновременно и ориентирован так, что его проекция и проекция вектора $\mathbf{V_i}$ на плоскость раздела направлены одинаково (рис. 1*б*). Вектор $\mathbf{V_{aux}}$, обладающий таким свойством, равен следующему векторному произведению.

$$\mathbf{V_{aux}} = [[\mathbf{n_0} \times \mathbf{V_i}] \times \mathbf{n_0}] \text{ или } \mathbf{V_{aux}} = [[\mathbf{k_{n0}} \times \mathbf{V_i}] \times \mathbf{k_{n0}}]. \quad (1)$$

Из рис. 1*б* легко видеть, что от знаков скалярных произведений $(\mathbf{V_{refl}}\,\mathbf{V_{aux}})$ и $(\mathbf{V_{refr}}\,\mathbf{V_{aux}})$ будет зависеть, является отражение и преломление положительным или отрицательным. Таким образом, можно сформулировать следующие критерии.

Критерий для определения характера отражения волны в анизотропной среде. Пусть в анизотропной среде при отражении волны от плоской границы в соответствии с законом сохранения импульса получилось некоторое количество отраженных лучей. Тогда, вычислив для каждого *j*-того отраженного луча скалярное произведение $\Pi^j{}_{refl}$

$$\Pi^j{}_{refl} = \left(\mathbf{V^j{}_{refl}} \mathbf{V_{aux}}\right) = \left(\mathbf{V^j{}_{refl}} \left[\mathbf{n_0} \times \left[\mathbf{V_i} \times \mathbf{n_0}\right]\right]\right), \quad (2)$$

можно утверждать, что *j*-тый луч испытывает положительное отражение, если $\Pi^j{}_{refl} > 0$, и – отрицательное отражение, если $\Pi^j{}_{refl} < 0$.

Критерий для определения характера преломления волны в анизотропных средах. Пусть при преломлении волны из одной анизотропной среды в другую через плоскую границу раздела в соответствии с законом сохранения импульса получилось некоторое количество преломленных лучей. Тогда, вычислив для каждого *j*-того преломленного луча скалярное произведение $\Pi^j{}_{refr}$

$$\Pi^j{}_{refr} = \left(\mathbf{V^j{}_{refr}} \mathbf{V_{aux}}\right) = \left(\mathbf{V^j{}_{refr}} \left[\mathbf{n_0} \times \left[\mathbf{V_i} \times \mathbf{n_0}\right]\right]\right), \quad (3)$$

можно утверждать, что *j*-тый луч испытывает положительное преломление, если $\Pi^j{}_{refr} > 0$, и – отрицательное преломление, если $\Pi^j{}_{refr} < 0$.

Критерии (2) и (3) можно использовать на практике для определения характера преломления или отражения электромагнитных и акустических волн в анизотропных средах как для трехмерных, так и для двумерных геометрий (хотя для двумерных геометрий проще использовать правила, сформулированные в разделах *1*, *2* и в [1]).

Библиографический список

1. Локк Э.Г. Свойства изочастотных зависимостей и законы геометрической оптики // УФН. 2008. Том 178, №4, С. 397-417.
2. Локк Э.Г. Критерии положительного и отрицательного отражения и преломления для трехмерных анизотропных геометрий // Радиотехника и электроника. 2009. Том 54, №2, С. 166-171.